Etude de la série de Flint Hills

Maximilien Dreveton

May 7, 2016

Référence : http://arxiv.org/abs/1104.5100v1

Gourdon Analyse p.275 (cas u=v=2, mais jolie utilisation du principe des tiroirs, donc se recase dans 190 dénombrement)

Approximation by Algebraic Numbers, Yann Bugeaud : https://books.google.fr/books?id=iAg8FL5jKSgC&pg=PA2&lpg=PA2&hl=fr#v=onepage&q&f=false

Remarque : Développement probablement original, qui fait se mélanger des conditions nécessaires sur la convergence de séries pour arriver à un critère de convergence pour une famille de série (Flint Hills, comme les série de Bertrand, mais remplacer le log par un sinus).

1 Mesure d'irrationalité

Définition 1. *Soit x un réel et R l'ensemble des entiers positifs μ tels que l'inégalité $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu}$ est vérifiée pour au plus un nombre fini de p,q entiers premiers entre eux. Cet ensemble peut éventuellement être vide (x est alors un nombre de Liouville).*

On définit la mesure d'irrationalité de x comme la borne inférieure de R (avec la convention $inf\{\emptyset\} = \infty$).

$$\mu(x) := \inf_{\mu \in R} \mu$$

Grossièrement, plus μ est grand, mieux il est approché par des rationnels.

Proposition 1.1. *μ est la mesure d'irrationalité de x ssi μ est le plus petit entier positif tel que l'on ait l'inégalité $\forall \epsilon > 0 \, \forall p, q \in \mathbb{N}$ (q entier assez grand) $|x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{\mu+\epsilon}}$*

Proof. Découle de la définition de μ.

En effet, la relation $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\mu+\epsilon}}$ est vérifiée pour un nombre fini de p,q premiers entre eux. Notons Q_{max} le plus grand de ces q. Alors par l'absurde, si il existe p et $q > Q_{max}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\mu+\epsilon}}$ alors soit p est premier avec q et on a la contradiction. Soit p pas premier avec q, mais l'inégalité est toujours vrai avec p+1 donc contradiction. □

Proposition 1.2. *Culture générale*

On distingue 3 cas :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si x rationnel} \\ 2 & \textit{si x algébrique (théorème de Roth, qui a eu la médaille Fields pour ça...)} \\ \geq 2 & \textit{si x est transcendant} \end{cases}$$

http://mathworld.wolfram.com/IrrationalityMeasure.html

Proof. Plus modestement, on peut montrer que

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x rationnel} \\ \geq 2 & \text{si x irrationnel} \end{cases}$$

Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_irrationnel#Approximation_par_les_rationnels`.

Première étape Soit x réel, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (en fait N réel positif marcherait aussi) montrons

$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq q \leq N \quad |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qN}$$

(trivial si x rationnel, donc supposons le irrationnel)

Considérons $u_k = kx - E(kx)$ où E est la partie entière, et $k = 1, \ldots, N+1$. Chacun des u_k est dans $[0,1[$, et est dans un seul des intervalles $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$ où $i = 0, \ldots N-1$. On a donc rangé N+1 nombres dans N boîtes : il existe au moins une boîte en contenant au moins deux, ce qui s'écrit :

$$\exists a, b \in \{1, \ldots, N+1\} a < b \quad |u_b - u_a| < 1/N$$

Ce qui se réécrit :

$$|(b-a)x - (E(bx) - E(ax))| < 1/N$$

p=E(bx)-E(ax), q=b-a conviennent.

Cas x rationnel Soit $\mu > 1$ et une infinité de couples d'entiers (p,q) premiers entre eux ($q > 0$) tels que $|x - p/q| < 1/q^\mu$. Montrons x irrationnel.

Si r=a/b rationnel, alors

$$0 < |r - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu} \Rightarrow \frac{1}{q^\mu} > \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - pb|}{bq} \geq \frac{1}{bq} \Rightarrow q^{\mu-1} \leq b$$

donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour q et, puisque pour chacune de ces valeurs l'ensemble des solutions p est borné, qu'un nombre fini de couples (p, q) solutions pour l'approximation de r, ce qui prouve qu'aucun rationnel r n'est égal à x.

Cas x irrationnel x irrationnel, on a l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'une couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$1 \leq q_n \leq n \text{ et } |x - p_n/q_n| \leq 1/(nq_n) \leq 1/q_n^2$$

Alors la suite de rationnels p_n/q_n tend vers x irrationnel, donc p_n et q_n divergent vers $+\infty$.

Conclusion On déduit des deux points précédents que la mesure d'irrationalité d'un rationnel est égale à 1 et que celle d'un irrationnel est supérieure ou égale à 2.

□

On a utilisé la proposition à priori "évidente" suivante, dont la démo est un peu tortueuse :

Proposition 1.3. *x irrationel, et $(r_n) = (p_n/q_n)$ suite de rationnels qui converge vers x. Alors p_n et q_n diverge vers $+\infty$.*

Proof. N entier naturel, Γ ensemble des rationnels a/b qui se trouvent dans [x-1,x+1] vérifiant : $a \in \mathbb{Z}$ $1 \leq b \leq N$. Γ est fini car

$$\Gamma = \cup_{1 \leq q \leq N} \Gamma_q \quad \text{avec} \quad \Gamma_q := \{r \in [x-1, x+1] : \exists p \in \mathbb{Z}, r = p/q\}$$

et Γ_q fini

x irrationnel donc n'est pas dans Γ. Par finitude de Γ, on en déduis :

$$\exists \rho \in]0,1[\forall r \in \Gamma \quad |x-a| > \rho$$

De plus comme r_n converge vers x :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |r_n - x| < \rho$$

Donc $\forall n \geq n_0 : r_n \notin \Gamma \Rightarrow q_n > N$ (par l'absurde si $q_n \leq N$, comme $r_n = p_n/q_n \in [x-1, x+1]$ alors on aurait $r_n \in \Gamma_{q_n}$, impossible). Ceci étant possible pour tout N, la suite q_n tend vers $+\infty$. Comme $p_n \sim xq_n$, idem pour p_n.

□

Théorème 1.4. *Soit x une racine réel d'un polynôme entier irréductible P(X) de degré $n \geq 2$. Alors il existe une constante positive $c_1(x)$ telle que :*

$$|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c_1(x)}{q^n}$$

pour tout nombre rationnel p/q.

Par exemple, il est loisible de choisir $c_1(x) = \frac{1}{1+\max_{|t-x|\leq 1} |P'(t)|}$

Proof. On prend $c_1(x)$ définit comme dans le théorème.

Vrai si $|x - p/q| \geq 1$.

Soit p/q rationnel tel que $|x - p/q| < 1$. Comme P(X) irréductible a coeff entier, on a $P(p/q) \neq 0$ et $|q^n P(p/q)| \geq 1$. Par Rolle (plutôt acrroissements finis non ???), il existe t nombre réel entre x et p/q tel que :

$$|P(p/q)| = |P(x) - P(p/q)| = |x - p/q| \times |P'(t)|$$

Donc $|t - x| \leq 1$ et :

$$|x - p/q| \geq \frac{1}{q^n |P'(t)|} \geq \frac{c_1(x)}{q^n}$$

□

Corollaire 1.5. *$\xi := \sum 10^{-n!}$ est transcendant.*

Proof. ξ irrationnel (car écriture décimale non périodique).

Posons $q_n := 10^{(n-)1!}$ et $p_n = q_n(10^{-1!} + \cdots + 10^{-(n-1)!})$. On a :

$$|\xi - \frac{p_n}{q_n}| = \sum_{m \geq n} \frac{1}{10^{m!}} \leq \frac{2}{AO^{n!}} = \frac{2}{q_n^n}$$

donc ξ n'est pas algébrique de degré plus ou moins 2 par le théorème précédent. Donc ξ est un nombre transcendant. □

2 Convergence de la série de Flint Hills

On définit la série de Flint Hills : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sin(n)^2}$, et on s'intéresse à sa convergence (ou non). S'il n'y avait pas le sinus, ça serait réglé. Le sinus pose problème, car bien que jamais nul (π est irrationnel), il se pourrait bien que certain n soit proche de $k\pi$, et donc sin(n) devienne petit : même avec le facteur n^3, le terme général pourrait exploser et on est embêté pour conclure. La question est de savoir si on peut ou non avoir beaucoup d'entiers se rapprochant de multiples de pi, ie de rationnels $\frac{n}{k}$ approchant π. On sent venir le lien entre la convergence de la série et la mesure d'irrationalité de π.

Lemme 2.1. *Pour tout réel x, on a :*

$$|sin(x)| \leq |x|$$

De plus, si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$:

$$|sin(x)| \geq \frac{2}{\pi}|x|$$

Proof. Concavité de sinus sur $[0, \pi]$ et imparité. □

Théorème 2.2. *Soient u,v deux réels positifs. Alors $\forall \epsilon > 0$, $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v} = O(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}})$. De plus :*

(i) Si $\mu(\pi) < 1 + u/v$, la suite $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v}$ converge (vers zéro).

(ii) Si $\mu(\pi) > 1 + u/v$, la suite $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v}$ diverge .

Proof. Soit $\epsilon > 0$ et $k = \mu(\pi) + \epsilon/v$. Alors par définition de la mesure d'irrationalité, l'inégalité :

$$|\pi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^k}$$

n'est valide que pour un nombre fini d'entiers p et q (premiers entre eux).

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $m = E(n/\pi)$ ou bien $m = E(n/\pi)+1$ que tel que $|n/\pi - m| \leq 1/2$. Donc $|n - m\pi| \leq \pi/2$ et d'après le lemme :

$$|sin(n)| = sin(n - m\pi) \geq \frac{2}{\pi}|n - m\pi| = \frac{2}{\pi}m|\frac{n}{m} - \pi|$$

Pour des n et m assez grands, on a $|n/m - \pi| \geq 1/m^k$, donc :

$$|sin(n)| \geq \frac{2}{\pi}m|\frac{n}{m} - \pi| \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^{k-1}} \geq c\frac{1}{n^{k-1}}$$

avec c constante (positive), dépendant de k mais pas de n (car n/m tend vers π quand n tend vers l'infini).

Donc, pour n assez grand :

$$\frac{1}{n^u|sin(n)|^v} \leq \frac{1}{c^v n^{u-(k-1)v}}$$

Avec le choix judicieux de k fait au début, on retrouve bien le résultat annoncé.

Le point (i) est une conséquence immédiate en considérant $\epsilon = v/u(1+u/v-\mu(\pi)) > 0$, on obtient $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v} = O\left(\frac{1}{n^\epsilon}\right)$

(ii) Supposons $\mu(\pi) > 1 + u/v$. Alors l'inégalité est vrai pour une infinité de p,q (premiers entre eux), en prenant par exemple k=1+u/v. Donc il existe une séquence de rationnels p_i/q_i tels que $|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}}$. Alors :

$$|sin(p_i)| = |sin(p_i - q_i\pi)| \leq |p_i - q_i\pi| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C\frac{1}{p_i^{k-1}}$$

Où C est une constante positive, dépendant uniquement de k.

Donc, on a une majoration de la suite :

$$\frac{1}{n^u|sin(n)^v|} > C^v n^{v(k-1)-u} = C^v$$

avec C une constante strictement positive.

Par ailleurs, on a :

$$|sin(1 + p_i)| = |sin(1 + p_i - q_i\pi)| \to sin(1)$$

. ie

$$\frac{1}{(1 + p_i)^u|sin(1 + p_i)|^v} \to 0$$

La suite $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v}$ possède une suite extraite convergeant vers 0 et une minorée par un truc strictement positif (donc ne convergeant pas vers 0); cette suite ne peut donc converger : elle diverge. □

Corollaire 2.3. *Soient u,v réels positifs.*

(i) Si la suite $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v}$ *converge, alors* $\mu(\pi) \leq 1 + u/v$

(ii) Si la suite $\frac{1}{n^u|sin(n)|^v}$ *diverge, alors* $\mu(\pi) \geq 1 + u/v$

Corollaire 2.4. *Si la série de Flint Hills* $\frac{1}{n^3|sin(n)|^2}$ *converge, alors* $\mu(\pi) \leq 5/2$.

Proof. La convergence de la série implique que le terme général tend vers 0. Le corollaire précédent permet de conclure. □

Théorème 2.5. *Soient u,v réels positifs. Si* $\mu(\pi) < 1 + \frac{u-1}{v}$, *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sin(n)|^v}$ *converge.*

Proof. L'inégalité $\mu(\pi) < 1 + \frac{u-1}{v}$ implique $u - v(\mu(\pi) - 1) > 1$. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $w = u - v(\mu(\pi) - 1) - \epsilon > 1$. On a de plus : $\frac{1}{n^u |sin(n)|^v} = O\left(\frac{1}{n^w}\right)$. Donc le critère de comparaison des séries à termes positifs impliqe : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sin(n)|^v} = O\Big(\zeta(w)\Big) = O\Big(1\Big)$ car $w > 1$. □

Corollaire 2.6. *Pour u,v positifs, si* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sin(n)|^v}$ *diverge, alors* $\mu(\pi) \geq 1 + \frac{u-1}{v}$

2.1 Majoration connue de $\mu(\pi)$ et implication sur les séries de type Flint Hills

π est transcendant, donc $\mu(\pi) \geq 2$. Pas de meilleure minoration connue à ce jour.

Pour une majoration, la meilleure actuelle (2008) est $\mu(\pi) \leq 7.6063\ldots$.

Donc, avec la borne actuelle, les séries FL avec (u,v) = (8,1),(15,2),(21,3), etc converge. Mais cette borne n'étant probablement pas optimale, d'autres séries de FL pourrait bien converger!

Remarque : On a dès le début considéré la suite avec une valeur absolue sur le sinus pour ne pas être embêté à prendre des puissances de nombres négatifs. Pour Flint Hills pas un pb, car le coeff sur le sinus est pair. Pour une série avec v impair, ça revient à considérer la convergence absolue. On peut donc se demander si la série ne convergerait pas simplement. Je pense que ça ne change pas grand chose, car le critère de convergence de la suite (donné au début) est toujours vrai, et c'est ça qui pose pb dans la convergence de la série (si la suite ne converge pas vers 0, la série ne va pas converger...).

2.2 Question philosophique

Que se passe-t-il si on remplace sinus par cosinus ?