Densité polynômes orthogonaux

Maximilien Dreveton

December 4, 2016

Références Ojectif Agreg. Durett (Probablity Theory and Examples) pour les contre exemples.

Demailly (premier chapitre) pour des résultats sur les zéros des polynômes orthogonaux et des exemples.

C'est aussi fait différemment dans un bouquin d'exo de Chambert Loir.

Remarque Ultra classique et se recase partout à condition de n'avoir aucune morale ni amour-propre. Par contre avec les contre exemples et le lien avec problème des moments en proba, devient intéressant. L'application à construction d'une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ est citée dans le rapport du jury.

1 Le théorème

Définition 1. *On note I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids $\rho : I -> \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \int_I |x|^n \rho(x)dx < \infty$$

On note $L^2(I,\rho)$ espace des fonctions telles que $\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx < \infty$, que l'on muni du produit scalaire suivant :

$$< f, g >:= \int_I f(x)g^*(x)\rho(x)dx$$

Donc $L^2(I,\rho)$ est un Hilbert.

Théorème 1.1. *Il existe $(P_n)_n$ une suite de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux, telle que $\deg P_n = n$. Cette suite est unique. Les P_n sont appelés polynômes orthogonaux pour le poids ρ.*

Proof. Par récurrence. $P_0 = 1$

Supposons $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$ construits, avec $degP_i = i$, donc $(P_0, P_1, \dots P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On cherche $P_n = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n}P_j(x)$

et $\forall k \in \{0,\dots,n-1\} < P_n, P_k >= 0$ donc $< x^n, P_k >= \lambda_{k,n}||P_k||_2^2$

d'où $\lambda_{k,n} = \frac{<x^n,P_k>}{||P_k||_2^2}$ est le seul choix possible (d'où existence + unicité). $\square$

Exemples

- $L^2(]0,+\infty[, e^{-x})$ P_n =Polynôme de Laguerre
- $L^2(]-\infty,+\infty[, e^{-x})$ P_n =Polynôme de Hermite (voir plus loin)
- $L^2(]-1,1[, 1)$ P_n =Polynôme de Legendre
- $L^2(]-1,1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ P_n =Polynôme de Tchebychev

Théorème 1.2. *Si* $\exists a > 0$ *tel que* $\int \exp(a|x|)\,\rho(x)dx < \infty$ *alors les polynômes orthogonaux forment une base de Hilbert de* $L^2(I,\rho)$.

Quelques remarques sur les hypothèse Supposons I=intervalle borné de $\mathbb{R}$. Alors le théorème de Weierstrass permet de conclure, sans l'hypothèse sur le poids.

Si l'intervalle n'est pas borné, on sait que Weirstrass n'est plus valide. En effet, les polynômes vont pouvoir approximer n'importe quelle fonction continue uniformément, sur un intervalle. On peut certes choisir l'intervalle arbitrairement grand, mais en dehors de l'intervalle, l'approximation

Par exemple, si $I = \mathbb{R}$, et $f \in C^0 \bigcap L^2(I)$, alors $f_n = f1_{[-n,n]}$ est continue sur un compact, donc approximée uniformément à ϵ près par $P_{n,\epsilon}$, mais pas en dehors de $[-n,n]$!

Si l'on veut avoir une approximation par des polynômes, il faut donc changer de norme, et mettre un poids qui écrase les fonctions à l'infini. En particulier, il faut que les polynômes soit dans $L^2(I,\rho)$, donc ρ écrase tous les $\exp(n\ln(x))$.

Un poids du genre $\rho(x) = \exp(-\sqrt{|x|})$ annule bien tous les polynômes, mais ne vérifie pas l'hypothèse de décroissante au minimum en exponentielle linéaire en x.

Proof. Supposons que l'on ait $a > 0$ tel que $\int \exp(a|x|)\,\rho(x)dx < \infty$. Soit $f \in L^2(I,\rho)$ et ϕ telle que $\phi(x) = f(x)\rho(x)1_I(x)$.

Montrons que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ On a $\forall t \geq 0$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$, donc $\forall x \in I|f(x)\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|)^2\rho(x)$.

Or, par hypothèse, ρ et ρf^2 sont dans $L^1(I)$, donc $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

TF de ϕ $\hat{\phi}(x) = \int_I f(x)\exp(-i\omega x)\rho(x)dx$

On prolonge $\hat{\phi}$ sur $\{z \in \mathbb{C}/Im(x) < a/2\} = B_a$

Posons : $g(z,x) = \exp(-izx)f(x)\rho(x)$

$$\begin{aligned}\forall z \in B_a \int_I |g(z,x)|dx &\leq \int_I \exp(a|x|/2)|f(x)|\rho(x)dx \\ &\leq \left(\int_I \exp(a|x|)\rho(x)\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\right)^{1/2} \\ &< \infty\end{aligned}$$

$\forall z \in B_A F(z) := \int_I g(z,x)dx$ est bien définie.

F holomorphe

- $\forall z \in B_a, x-> g(z,x)$ mesurable
- $z-> g(z,x)$ est holomorphe pour presque tout x
- $\forall z \in B_a,\ |g(z,x)| \leq \exp(a|z|/2)|f(x)|\rho(x)$

Donc (holomorphie sous signe somme) F est holomorphe sur B_a et prolonge $\hat{\phi}$. (ce théorème nous assure aussi que l'on peut dériver sous le signe somme)

f orthogonal à $(x^n)_n$ implique F=0 Posons $g_n(x) = x^n$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, < f, g_n >= 0$. Montrons que f=0.

On a $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n \exp(-izx)f(x)\rho(x)dx$

donc $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = (-i)^n < f, g_n >_I = 0$

Or F est holomorphe en zéro, donc $F(z) = \sum \frac{F^{(n)}(0)}{n!}z^n = 0$ au voisinage de 0, donc F=0 sur un voisinage de 0.

Donc le théorème de prolongement analytique assure que F=0 sur B_a tout entier (car c'est un ouvert connexe avec point d'accumulation).

En particulier $\hat{\phi} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : (P_n) est une base hilbertienne Or l'application $\phi \mapsto \hat{\phi}$ qui a une fonction $L^1(I)$ associe sa tranformée de Fourier est injective, donc $\phi = 0$.

Or $\rho > 0$ donc f=0 sur I, donc l'orhtogonal de Vect($(g_n)_n$) est $\{0\}$, donc Vect($(g_n)_n$)=$L^2(I,\rho)$

Donc $(x^n)_n$ est une base de Hilbert, donc $(P_n)_n$ aussi. (car Vect($(P_n)_n$)=Vect($(g_n)_n$)) □

1.1 Exemples : polynômes et fonctions de Hermite

Prenons pour poids $\rho = e^{-x^2}$. Alors la famille des $P_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1/4}\pi^{n/2}\sqrt{n!}} e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R},\rho)$.

Par suite, les $h_n = e^{-x^2} P_n$ (appelées fonctions de Hermite) forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

1.2 Suppléments

Théorème 1.3. *Polynôme de meilleure approximation*

Soit $f \in L^2(I,\rho)$. Alors $\exists! R_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $||f - R_n||_2 = d(f,\mathcal{P}_n)$.

Proof. $\mathcal{P}_n$ est un sev fermé du Hilbert $L^2(I,\rho)$.

Le théorème de projection sur un sev fermé donne : $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{<f,P_k>}{||P_k||_2^2} P_k(x)$ □

Théorème 1.4. *$\forall \rho$ poids sur $I =]a,b[$, P_n possède n zéros distincts dans $]a,b[$.*

Proof. Idée : sorte de récurrence sur le nombre de racine (à n fixé!) + absurde. Regarder les petits cas pour voir comment ça marche.

n=1 $< P_1, P_0 >= 0 = \int_I P_1(x)\rho(x)dx$

Si P_1 n'a pas de racines dans I, alors $P_1\rho$ ne s'annule pas, donc serait de signe constant et l'intégrale serait nécessairement non nulle. Donc P_1 s'annule sur I.

Pour montrer un seul zéro, on se rappelle que P_1 est de degré 1...

n quelconque $< P_n, P_0 >= 0$: le même raisonnement conduit à l'existence d'un zéro.

Notons $x_1, \ldots, x_k$ les zéros distincts de P_n contenus dans I, avec $m_1, \ldots, m_k$ leur multiplicité.

donc $m_1 + \cdots + m_k \leq deg(P_n) = n$.

Posons $\epsilon_i = 0$ si m_i pair, 1 sinon. et $q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{\epsilon_i}$ $\deg q \leq k \leq n$

Le polynômes $P_n Q$ a dans I pour zéros les x_i, avec multiplicité paire $m_i + \epsilon_i$.

Donc $< P_n, Q >= \int P_n(x)Q(x)\rho(x)dx \neq 0$

Or P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $q \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc deg q =n, et donc k=n et $\forall i\, m_i = 1$. □

2 Contre exemples; non densité des polynômes orthogonaux

2.1 Contre exemple classique via loi lognormale

Proposition 2.1.

$$f_0(x) := \sqrt{2\pi}\frac{1}{x}\exp(-\frac{(logx)^2}{2})$$

(densité d'une log-normale). Soit $-1 \leq a \leq 1$, posons :

$$f_a(x) = f_0(x)(1 + a\sin(2\pi\log x))$$

On a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad \int_0^\infty x^r f_0(x) sin(2\pi\log x) = 0$$

Autrement dit, les va à densité selon f_0 et f_a admettent les même moments à tout ordre.

Proof. Changement de variable $x = \exp(s + r)$ $s = \log x - r$ $ds = dx/x$ donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \exp(rs + r^2) \exp(-\frac{(s+r)^2}{2}) \sin(2\pi(s+r))ds \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{r^2}{2}) \int_{\infty}^{\infty} \exp(-\frac{s^2}{2}) \sin(2\pi s)ds \tag{2}$$

$$=0 \tag{3}$$

(on intègre une fonction impaire) □

Remarque sur la log-normale Si $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y := \exp(X) \approx Lognormal$ et

$$E(Y^n) = E(exp(nX)) \tag{4}$$

$$= \int e^{nx}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx \tag{5}$$

$$= e^{n^2/2} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-n)^2/2}dx \tag{6}$$

$$= exp(n^2/2) \tag{7}$$

On peut trouver une va discrète qui possède les même moments à tout ordre que la lognormale. Posons Z_a telle que $P(Z_a = ae^k) = a^{-k} \exp(-k^2/2)/c_a$ pour $k \in \mathbb{Z}$, où c_a est une constante de normalisation.

Alors

$$\exp(-n^2/2)E(Z_a^n) = e^{-n^2/2} \sum_k (ae^k)^n a^{-k} e^{-k^2/2}/c_a \tag{8}$$

$$= \sum_k a^{-(k-n)} \exp(-\frac{(k-n)^2}{2}) \frac{1}{c_a} \tag{9}$$

$$= 1 \tag{10}$$

2.2 Contre exemple optimal qui sort de nulle part

Proposition 2.2. *Posons* $\lambda \in]0, 1[$ $\quad -1 \le a \le 1 \quad \beta = \tan(\lambda\pi/2)$

$$f_{a,\lambda}(x) := c_\lambda e^{-|x|^\lambda}(1 + a \sin(\beta|x|^\lambda sgn(x)))$$

A λ fixé, les $f_{a,\lambda}$ sont des densités de va ayant les même moments.

Proof. Montrons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-|x|^\lambda} \sin(\beta|x|^\lambda sgn(x)) = 0$$

Si n est pair la fonction intégrée est impaire et c'est bon.

Si n est impair alors on intègre une fonction paire donc on montre que l'intégrale entre 0 et ∞ est nulle. La suite est une succession d'astuces de calcul.

Tout d'abord, on a :

$$\int_0^\infty t^{p-1}e^{-qt}dt = \frac{\Gamma(p)}{q^d} \quad Re(q) > 0$$

On va utiliser cette relation avec : $p = \frac{n+1}{\lambda}$ $\quad q = 1 + i\beta$ et $t = x^\lambda$ comme changement de variable.

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{\lambda})}{(1+i\beta)^{\frac{n+1}{\lambda}}} = \int_0^\infty x^{\lambda(\frac{n+1}{\lambda}-1)} \exp(-(1+i\beta)x^\lambda)\lambda x^{\lambda-1}dx \tag{11}$$

$$= \lambda \int_0^\infty x^n \exp(-x^\lambda)\cos(\beta x^\lambda)dx - i\lambda \int_0^\infty x^n e^{-x^\lambda} \sin(\beta x^\lambda)dx \tag{12}$$

Dans la dernière ligne, on remarque comme par hasard que la partie imaginaire de $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{\lambda})}{(1+i\beta)^{\frac{n+1}{\lambda}}}$ est justement la quantité que l'on veut voir s'annuler.

Montrons donc que $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{\lambda})}{(1+i\beta)^{\frac{n+1}{\lambda}}}$ est réel (c'est à dire $(1+i\beta)^{\frac{n+1}{\lambda}}$ réel), et ça achèvera la preuve.

Comme $\beta = \tan(\lambda\pi/2)$, on a :

$$\left(1+i\beta\right)^{\frac{n+1}{\lambda}} = \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{-\frac{n+1}{\lambda}} \left(\exp\left(\frac{i\lambda\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n+1}{\lambda}} \tag{13}$$

Comme $\lambda < 1$ on a $\frac{n+1}{\lambda} > 1$ pour tout n.

De plus : $\left(\exp\left(\frac{i\lambda\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n+1}{\lambda}} = \exp\left(i\frac{n+1}{2}\pi\right)$ et n impair donc $\frac{n+1}{2}$ est entier, ce qui achève la démonstration.

□