Théorème Central Limite

Maximilien Dreveton

April 10, 2016

Référence : Yger, L3 Maths Appliqués, p.650

Lemme 0.1. *Z_n, Z va à densité respectives h_n, h. Si $h_n \to h$, alors Z_n converge en loi vers Z*

Proof. Soit $t \in \mathbb{R}$. On utilise le lemme de Fatou :

$$\liminf_n F_{X_n}(t) = \liminf \int_{-\infty}^{t} h_n(t)dt \geq \int_{-\infty}^{t} h(t)dt$$

$$\liminf_n (1 - F_{X_n}(t)) = \liminf \int_{t}^{\infty} h_n(t)dt \geq \int_{t}^{\infty} h(t)dt = 1 - F_X(t)$$

Donc $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$. □

Théorème 0.2. *Théorème de Lévy (le plus simple) X_n converge en loi vers X si et seulement si ϕ_{X_n} converge simplement vers ϕ.*

Proof. Le sens direct découle de la définition de la convergence en loi, car $t \to \exp(it)$ est une fonction continue bornée.

Pour le sens direct, considérons Y une gaussienne $N(0, \sigma)$, avec $\sigma > 0$, et Y indépendante des X_n et de X.

Dans une première étape, on va montrer que $X_n + Y$ converge en loi vers X+Y. Puis on montrera que X_n converge en loi vers X.

Première étape :

Soit f la densité de Y, fixons $m \in \mathbb{R}$.

Alors $\exists g$ intégrable telle que $f(t - n) = \widehat{g}(-t)$. Pour cela, on peut prendre $g(x) = c \exp(-\frac{\sigma^2 x^2}{2} + imx)$, avec c constante bien choisie.

Notons $h = f * P_X$ densité de X+Y, et $h_n = f * P_{X_n}$ celle de $X_n + Y$.

$$
\begin{aligned}
h_n(m) &= \int f(t-m)dP_{X_n}(t) \\
&= \int \widehat{g}(-t)dP_{X_n}(t) \\
&= \int\int \exp(ity)g(y)dy \\
&= \int g(y)\phi_{X_n}(y)dy \quad \text{(Fubini)} \\
&\to \int g(y)\phi_X(y)dy \quad \text{(Convergence dominée)} \\
&= \int f(t-m)dP_X(t) \quad \text{(en faisant le chemin inverse)} \\
&= h(m)
\end{aligned}
$$

Donc, par le lemme, $X_n + Y$ converge en loi vers X+Y
Deuxième étape : Montrons que X_n converge en loi vers X.
Soit $\epsilon > 0$ et t un point de continuité de F_X.

$$
\begin{aligned}
P(\{X_n \leq t\} \bigcap \{Y \leq \epsilon\}) &\leq P(X_n + Y \leq t + \epsilon) \\
\limsup P(\{X_n \leq t\} \bigcap \{Y \leq \epsilon\}) &\leq \limsup P(X_n + Y \leq t + \epsilon) \quad \text{(En fait la limsup du membre de droite est} \\
&= P(X + Y \leq t + \epsilon) \\
&\leq P(\{X \leq t + 2\epsilon\} \bigcup \{Y \leq -\epsilon\})
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\limsup P(\{X_n \leq t\}) - P(Y > \epsilon) \leq P(\{X \leq t + 2\epsilon\}) + P(\{Y \leq -\epsilon\})
$$

Bienaymé-Tchebychev : $P(|Y| \geq \epsilon) \leq \sigma^2/\epsilon^2$.
Donc $\limsup P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t + 2\epsilon) + \sigma^2/\epsilon^2$.
Ceci étant vrai pour tout $\sigma > 0$, on a donc : $\limsup P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t + 2\epsilon)$ (1).
Enfin, un raisonnement similaire conduit à $\liminf P(X_n \leq t \geq P(X \leq t - 2\epsilon))$ (2).
(1) et (2) étant vrai pour tout ϵ, on a $P(X_n \leq t) \to_n P(X \leq t)$, et ce en tout point de continuité t de F_X. Donc X_n converge en loi vers X.

$\square$

Théorème 0.3. *TCL*
(X_n) va iid de carré intégrables. On pose m=E(X_1), $\sigma^2 = Var(X_1)$, et $\overline{X}_n := \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$.
Alors $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \to^{Loi} \mathcal{N}(0,1)$
Par conséquent, $\forall a < b \quad P(a\sigma/\sqrt{n} < \overline{X}_n - m < b\sigma/\sqrt{n}) \to_n \frac{1}{2\pi}\int_a^b \exp(-t^2/2)$

Proof. Notons $\phi_n(t)$ la fonction caractéristique de $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} = \sqrt{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

avec $Y_i := \frac{X_i - m}{\sigma}$.

$E(Y_1) = 0$ et $E(Y_1^2) = 1$.

$\phi(t) = 1 - t^2/2(1 + \epsilon(t)$ avec $\lim_{t=0} \epsilon(t) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \phi_{\sum_i Y_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \\
&= (\phi(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n \\
&= (1 - t^2/2n(1 + \epsilon(t)))^n \\
&= \exp(n\ln(1 - \frac{t^2}{2n}(1 + \epsilon(t/\sqrt{n})))) \\
&= \exp(-\frac{t^2}{2n}(1 + \epsilon(\frac{t}{\sqrt{n}}))) \\
&\to \exp(-\frac{t^2}{2})
\end{aligned}$$

Or $\exp(-\frac{t^2}{2})$ est la fonction caractéristique d'une gaussienne N(0,1) !

Donc (Lévy) $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \to^{Loi} \mathcal{N}(0, 1)$ $\square$

0.1 Intervalle de confiance asymptotique

Soit Z une N(0,1), et $0 < \alpha < 1$. On note ϕ_α tel que $P(Z \in [-\phi_\alpha, \phi_\alpha]) = \alpha$, d'où $P(Z < \phi_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

σ connu : $P(|\overline{X}_n - m| < \frac{\phi_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}) \approx 1 - \alpha$ (TCL)

c'est à dire :

$$P(m \in [\overline{X}_n - \frac{\phi_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{\phi_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}]) \approx 1 - \alpha$$

Mais en fait, dans la pratique, σ est souvent inconnu.

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

est un estimateur sans biais ($E(S_n^2) = \sigma^2$) consistant (converge en proba vers σ^2) de σ^2.

Lemme 0.4. *Slutsky*

Si X_n converge en loi vers X et Y_n en proba vers a une constante, alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X,a).

Donc $\sqrt{n}(\frac{\overline{X}_n - m}{S_n}) \to N(0, 1)$

Autrement dit, on peut remplacer σ par S_n dans le TCL, car S_n converge en proba vers σ constante.

L'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ est donc : $[\overline{X}_n - \frac{\phi_\alpha S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{\phi_\alpha S_n}{\sqrt{n}}]$