Shannon

Maximilien Dreveton

May 11, 2016

Références Willem (plus ou moins)

Motivation / speech à l'oral

Proposition 0.1.

$$BL^2 := \{f \in L^2 : \hat{f} = 0 \textit{presque partout en dehors de]-1/2,1/2[}\}$$

BL^2 est un Hilbert, de base (sinc)

Théorème 0.2. *$f \to f\Delta$ est injective sur BL^2, et $f = \mathcal{F}^{-1}\big(1_{]-1/2,1/2[}\hat{f\Delta}\big)$*

Proof. 1/ Heuristique et preuve pour $f \in S \cap BL^2$.

2/ Cas général pour $f \in BL^2$

2.a/ On montre $\exists \phi_n \in S \cap BL^2 \to f$ en norme 2.

2.b/ On montre que dans BL^2, convergence en norme 2 implique convergence en norme $||.||_\infty$.

2.c/ Conclure

Heuristique pour $S \in BL^2$ Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un signal physique (sonore par exemple), que l'on échantillonne, c'est à dire mesure à intervalles régulièrement espacés.

On a donc une collection $\{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$ de mesures expérimentales, et on veut retrouver (recomposer) f à partir de ces mesures.

Supposons $f \in S$. Alors la donnée des $\{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$ équivaut à celle de :

$$f\Delta = \sum_k \phi(k)\delta_k$$

(produit de SxS' défini un élément de S')

$\hat{f\Delta} = \Delta * \hat{\phi} = \sum \hat{\phi}(k + .)$ (Formule de Poisson pour mq $\hat{\Delta} = \Delta$).

Donc en TF, multiplier par Δ (ie échantillonner) revient à ajouter les spectres de $/phi$ mais décalés de 1.

Montrer sur un schéma que si le spectre a une largeur plus grande que 1, on a recouvrement et donc on ne peut pas retrouver la fonction de départ par TF inverse (pas injectivité).

Pas de pb si f est dans BL^2.

Cas général   a/ Par densité de S dans BL^2, $\phi_n \in S \to f$ en norme 2. Donc par Plancherel, $\hat{\phi}_n \in S \to \hat{f}$.

Par contre, les ϕ_n ne sont à priori pas dans BL^2. Définissons $\tilde{\phi}_n$ tel que :

$$\hat{\tilde{\phi}}_n = \phi_n \Xi_n$$

où Ξ_n est une fonction plateau valant 0 en dehors de $[-1/2, 1/2]$ et 1 sur $[-1/2 + 1/n, 1/2 - 1/n]$. Alors :

$$\begin{aligned} ||\tilde{\phi}_n - f||_2 = & \quad ||\hat{\tilde{\phi}}_n - \hat{f}||_2 && \text{par Plancherel} && (1)\\ = & \quad ||\phi_n \Xi_n - \hat{f}||_{L^2(I)} && && (2)\\ & \to_n 0 && \text{par convergence dominée} && (3) \end{aligned}$$

b/

$$\begin{aligned} |u(x)| = & \int_I \hat{u}(y) \exp(2i\pi xy) dy && \text{car} \hat{u} \in L^1 && (4)\\ \leq & ||\hat{u}||_{L^2(I)} ||1||_{L^2(I)} && \text{par Cauchy Schwarz} && (5)\\ \leq & ||u||_2 && \text{par Plancherel} && (6)\\ ||u||_\infty \leq ||u||_2 & && && (7) \end{aligned}$$

Donc convergence en norme 2 implique convergence en $||.||_\infty$.

c/ Soit $\phi_n \in S \cap BL^2$ tendant vers f en norme 2, donc en norme infinie, donc presque partout. Soit ψ une fonction quelconque dans l'espace de Schwartz (fonction test). On a :

$$\begin{aligned} < \hat{f\Delta}, \psi > = & < f\Delta, \hat{\psi} > && (8)\\ = & < \Delta, f\hat{\psi} > && (9)\\ = & \sum_k f(k)\hat{\psi}(k) && (10)\\ = & \sum_k \lim_n \phi_n(k)\hat{\psi}(k) && (11)\\ = & \lim_n \sum_k \phi_n(k)\hat{\psi}(k) \qquad \text{par convergence dominée} && (12)\\ = & \lim_n < \hat{\phi_n\Delta}, \psi > && (13)\\ & && (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi_n \Delta}(\xi) = & \sum_k \phi_n(k + \xi) && (15)\\ = & \phi_n(\xi - \xi') && (16)\\ & && (17) \end{aligned}$$

La dernière ligne vient du fait que les termes dans la somme sont tous nuls sauf dans le cas où $k+\xi \in]-1/2, 1/2[$ (car $\phi_n \in BL^2$), c'est à dire pour au plus un indice k, noté ξ' (on a $\xi' = E(\xi - 1/2)$ où E est la partie entière).

Donc :

$$
\begin{aligned}
< \hat{f\Delta}, \psi > &= \lim_n < \hat{\phi_n\Delta}, \psi > && (18)\\
&= \lim_n \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi_n\Delta}(\xi)\psi(\xi)d\xi && (19)\\
&= \lim_n \int \phi_n(\xi-\xi')\psi(\xi)d\xi && (20)\\
&= \int \lim_n \phi_n(\xi-\xi')\psi(\xi)d\xi = \quad \int f(\xi-\xi')\psi(\xi)d\xi && (21)\\
& && (22)
\end{aligned}
$$

On a interverti limite intégrale par convergence dominée. Enfin, comme $f(\xi-\xi') \in BL^2$ donc admet un représentant continu, la dernière ligne assure que :$\hat{f\Delta}(\xi) = \hat{f}(\xi-\xi')$

On peut enfin conclure :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(1_{]-1/2,1/2[}\hat{f\Delta}\right) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{]-1/2,1/2[}(\xi)\hat{f\Delta}(\xi)\exp(2i\pi x\xi)d\xi && (23)\\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{]-1/2,1/2[}(\xi)\hat{f}(\xi-\xi')\exp(2i\pi x\xi)d\xi && (24)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\exp(2i\pi x\xi)d\xi && (25)\\
&= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) && (26)\\
&= f(x) && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}
$$

□