Riesz Fischer

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Schwartz Analyse III, Candelpergher
Brezis, Analyse fonctionnelle
Remarque : Preuve de Schwartz plus expéditive.

0.1 Recasages

Passe à l'aise 201 Espaces de fonctions : exemples et applications.
205 Espaces complets. Exemples et applications.
208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
234 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.
235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

0.2 Le développement

Théorème 0.1. *L'espace $L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ est un Banach.*

Proof. On montre d'abord les inégalités d'Hölder et Minkovski, puis le caractère ev puis evn. Le caractère complet fera l'objet de la prochaine proposition.

Inégalité de Hölder Inégalité arithmético-géométrique : $\lambda \in [0,1] a, b \geq 0$ alors $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$
(prendre le log et conclure par concavité de log).

$$\begin{aligned}
H := & \frac{\int |fg| d\mu}{||f||_p ||g||_q} && (1)\\
= & \int \left(\frac{|f|^p}{\int |f|^p} \right)^{1/p} \left(\frac{|g|^q}{\int |g|^q} \right)^{1/q} d\mu && (2)\\
\leq & \int \left(\frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int |f|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^p}{\int |g|^q} \right) d\mu && (3)\\
\leq & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} && (4)\\
\leq & 1 && (5)
\end{aligned}$$

Inégalité de Minkowski On remarque $||f||_p = \inf\{\lambda > 0 / \int |\frac{f}{\lambda}|^p d\mu \leq 1\}$

Soient λ, μ avec $\int |\frac{f}{\lambda}|^p d\mu \leq 1$ et $\int |\frac{g}{\mu}|^p d\mu \leq 1$

$$\int \left|\frac{f+g}{\lambda+\mu}\right|^p d\mu = \int \left|\frac{\lambda\frac{f}{\lambda}+\mu\frac{g}{\mu}}{\lambda+\mu}\right|^p d\mu \quad (6)$$

$$\leq \int \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left|\frac{f}{\lambda}\right|^p + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left|\frac{g}{\lambda}\right|^q\right) \quad (7)$$

$$\leq 1 \quad (8)$$

La première inégalité est justifiée via la convexité de $t- > t^p$ (car $p \geq 1$).

Donc $||f+g||_p \leq \inf(\lambda+\mu) = ||f||_p + ||g||_q$

L^p espace vectoriel p=1 ou p=∞ OK

Soit $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p$. Alors :

$$|f(x)+g(x)|^p \leq \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)^p \quad (9)$$

$$\leq \Big(2\max(|f|,|g|)\Big)^p \quad (10)$$

$$\leq 2^p\Big(|f(x)|^p+|g(x)|^p\Big) \quad (11)$$

donc $f+g \in L^p$.

De plus, $\lambda f \in L^p$ pour λ scalaire (trivial).

L^p normé On vérifie $||.||_p$ est une norme. Le caractère défini positif est trivial. Pour l'inégalité triangulaire, on a :

$$||f+g||_p^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \quad (12)$$

$$\leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \quad (13)$$

$$(14)$$

Or $|f+g| \in L^q$ donc Holder donne :

$$||f+g||_p^p \leq ||f+g||_p^{p-1}||f||_p||f+g||_p^{p-1}||g||_p \quad (15)$$

$$||f+g|| \leq ||f||_p + ||g||_p \quad (16)$$

□

Proposition 0.2. *L^p complet*

Proof. Montrons que toute série absolument convergente est convergente.

Soit (u_n) une suite d'éléments dans L^p telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p < \infty \tag{17}$$

On va raisonner en 3 étapes :

0/ Montrer l'inégalité de convexité dénombrable, cad $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \in L^p$ et

$$\Big|\Big| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \ \Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p \tag{18}$$

1/ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge pour presque tout x dans I (au sens de la mesure considérée, ici de Lebesgue pour simplifier).

2/ $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in L^p(I)$

3/ $\lim_N ||f_N - f||_p = 0$ où $f_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$

Etape 0 Voir le théorème 0.3.

Etape 1 On utilise l'inégalité de convexité généralisée dénombrable à $|u_n|$:

$$0 \leq \Big|\Big| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \ \Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p < \infty \tag{19}$$

En particulier :

$$0 \leq \int_I \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| \Big)^p dx < \infty \tag{20}$$

Notons B l'ensemble des $x \in I$ pour lesquels la série $\sum |u_n(x)|$ diverge, et supposons $\lambda(B) \neq 0$. Alors la suite $N \to \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ tends vers $+\infty$ sur cet ensemble B de mesure non nulle, et il en est de même pour la suite $N \to \sum_{n=0}^{N} |u_n|^p$, ce qui contredit l'inégalité 20.

Autrement dit, la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p$ implique $\lambda(B) = 0$.

Etape 2 On a par ce qui précède que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \in L^p$.

Or :

$$\int_I \Big| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Big|^p dx \leq \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Big| u_n \Big| \right)^p dx < \infty \tag{21}$$

donc $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in L^p(I)$

Etape 3 On sait que $f_N = \sum_{n=0}^N u_n$ converge pp vers f. Et on a la majoration :

$$|f_N - f| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \in L^p \tag{22}$$

La convergence dominée assure alors :

$$\lim_N ||f_N - f||_p = 0 \tag{23}$$

Conclusion La série $\sum_{n=0}^N u_n$ converge simplement en norme p vers $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Donc L^p est complet.

□

0.3 Suppléments

Théorème 0.3. *(Inégalité convexité généralisée, version Schwartz)*

Soient (Ω, S, μ) un espace mesuré quelconque, p un réel ≥ 1, $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies μ-presque partout sur Ω à valeur positives finies ou infinies. On a l'égalité de convexité dénombrable généralisée :

$$\Big|\Big| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p \tag{24}$$

Proof. L'inégalité de Minkowski + une récurrence facile donne, pour tout N entier naturel :

$$\Big|\Big| \sum_{n=0}^{N} u_n \Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{N} ||u_n||_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p \tag{25}$$

On va alors appliquer Beppo Levi à la suite croissante (g_m) :

$$g_m = \Big(\sum_{n=0}^{m} u_n\Big)^p \tag{26}$$

dont la limite est la fonction

$$g = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)^p \tag{27}$$

On a (Beppo Levi) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_m(x)dx = \int_I g(x)dx \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \Big(\sum_{n=0}^{m} u_n(x)\Big)^p dx = \int_I \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\Big)^p dx \tag{29}$$

Par continuité de t^p, on a donc

$$\lim_{m\to\infty} \Big|\Big| \sum_{n=0}^{N} u_n \Big|\Big|_p^p = \Big|\Big| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Big|\Big|_p^p \tag{30}$$

Enfin, en passant à la limite dans l'équation plus haut, on obtient l'inégalité voulue. □

Théorème 0.4. *Soit E un evn. Si toute série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ d'éléments de E, dont la série des normes $\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$ est convergente, est aussi convergente, alors E est complet.*

Proof. On doit vérifier que toute suite de Cauchy de E est convergente.

Soit (x_n) une suite de Cauchy. Quel que soit l'entier $k \geq 0$, on peut trouver un entier p_k tel que $m \geq p_k, n \geq p_k$ entraine $||x_m - x_n|| \leq 1/2^k$.

On choisit ainsi les p_k les uns après les autres, de sorte que (p_k) soit une suite strictement croissante.

Considérons la série :

$$x_{p_0} + (x_{p_1} - x_{p_0}) + (x_{p_2} - x_{p_1}) + \dots$$

La série de ses normes est majorée par la série convergente suivante :

$$||x_{p_0}|| + 1 + 1/2 + 1/4 + \dots$$

En vertu des hypothèses faites sur E, la première série est elle même convergente, donc la suite partielle des (x_{p_n}) est convergente. Or, la suite (x_n) est de Cauchy, et admet une suite extraite qui converge (ie une valeur d'adhérence) : donc (x_n) converge, et E est bien complet. □

Proposition 0.5. *L^p complet*

Proof. Montrons que toute série absolument convergente est convergente.

Soit (u_n) une suite d'éléments dans L^p telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p < \infty \tag{31}$$

Posons : $f_N = \sum_{n=0}^{N} u_k$

Étape 1 : Montrer l'inégalité de convexité dénombrable, cad $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \in L^p$ et

$$\Big|\Big| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||_p \tag{32}$$

Etape 2 : En déduire que $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in L^p$

Etape 1 On va montrer :

$$\Big|\Big|\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|\Big|\Big|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty}||u_n||_p \tag{33}$$

Etape 2 On a par ce qui précède que $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n| \in L^p$.
Or :

$$\int_I \Big|\sum_{n=0}^{\infty}u_n\Big|^p dx \leq \int_I \sum_{n=0}^{\infty}\Big|u_n\Big|^p dx < \infty \tag{34}$$

donc $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in L^p$

Etape 3 $\square$