# Marche aléatoire et théorème de Polya

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

**Références** Ref: Norris, Markov Chains
Benaim, El Karoui Promenade Aléatoire
Lesigne, Pile ou Face

## 0.1 Recasages

**Passe à l'aise** 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements. (version dimension 1 et 2)

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples. (version dimension 1 et 2; Borel Cantelli est en plein dans la leçon)

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

**Arnaques** 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

## 0.2 Le développement

### 0.2.1 Introduction et définition

**Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$** avec d $\in \mathbb{N}^*$

**Définition 1.** *Soit $(S_n)$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ définie par*

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

*où les $(X_i)$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $\{-e_i, e_i : 1 \leq i \leq d\}$ avec $(e_i)$ base de $\mathbb{Z}^d$.*

Si on part de 0, on a:

$$\begin{cases} S_n &= \sum_{k=0}^{n} X_n \\ S_0 &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

La marche aléatoire s'interprète facilement en dimension 2 comme un marcheur ivre cherchant son chemin; en dimension 3, remplacer l'ivrogne par un poisson ou un oiseau.

Le but de ce développement est d'étudier le comportement asymptotique de la marche aléatoire. La loi des grands nombres ne nous apprend pas grand chose, car l'espérance commune des $X_i$ est nulle.

**Théorème 0.1.** *Théorème de Polya*

*(i) Si $d \leq 2$, la marche aléatoire est récurrente : tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement une infinité de fois par la marche.*

*(ii) Si $d \geq 3$, la marche aléatoire est transiente : presque sûrement, tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement un nombre fini (qui peut être nul) de fois par la marche.*

D'une certaine manière, lorsque d≥3, l'espace ambiant est trop grand pour que l'on puisse revenir sur son point de départ.

La marche aléatoire est une chaine de Markov irréductible (une seule classe d'équivalence), donc tous les états ont même nature. Autrement dit, il suffit de montrer que le nombre de passage en zéro est fini ou infini pour conclure sur le caractère de la marche sur $\mathbb{Z}^d$ tout entier.

### 0.2.2 Lemme de Borel Cantelli et première conséquence

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements aléatoire. On définit :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_p \bigcup_{n \geq p} A_n$$

On remarque :

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_n A_n &\iff \forall p, \exists n \geq p, \text{ tel que } \omega \in A_n \\ &\iff \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n \\ &\iff \sum_n 1_{A_n}(\omega) = +\infty \end{aligned}$$

De même :

$$\omega \notin \limsup_n A_n \iff \omega \text{ appartient à un nombre fini de } A_n$$

**Lemme 0.2.** *Lemme de Borel-Cantelli*
*Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.*

*(i) Si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$, c'est à dire il y a au plus un nombre fini de $A_n$ qui sont réalisés.*

*(ii) Si de plus la suite $(A_n)_n$ est indépendante, alors :*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty \to \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

*Dans ce cas, presque sûrement, une infinité de $A_n$ sont réalisés.*

On va appliquer ce lemme à la marche aléatoire

**Proposition 0.3.** *Soit $(S_n)_n$ une marche aléatoire en dimension d.*

*(i) Si $\sum \mathbb{P}[S_n = 0] < \infty$, alors presque sûrement, la marche aléatoire ne revient qu'un nombre fini de fois en 0.*

*(ii) Si $\sum \mathbb{P}[S_n = 0] = \infty$, alors presque sûrement, la marche aléatoire passe par zéro une infinité de fois.*

*Proof.* Posons $A_n = \{S_n = 0\}$ et $A = \limsup A_n$.

(i) Conséquence de Borel Cantelli : $\mathbb{P}(A) = 0$.

(ii) Notons $B = A^c$ (B est l'évènement "la marche passe un nombre fini de fois par zéro).

$$\begin{aligned}
B = & \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \bigcap \{\forall k > n S_k \neq 0\} \\
= & \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \bigcap \{\forall k > n S_k - S_n \neq 0\} \\
= & \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \bigcap \{\forall i > 0 S_{n+i} - S_n \neq 0\} \\
= & \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \bigcap \{\forall i > 0 X_{n+1} + X_{n+2} + \ldots + X_{n+i} \neq 0\}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cancel{B}) & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \bigcap \{\forall i > 0 \ : \ X_{n+1} + X_{n+2} + \ldots + X_{n+i} \neq 0\}) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \ \mathbb{P}(\forall i > 0 \ : \ X_{n+1} + X_{n+2} + \ldots + X_{n+i} \neq 0) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) \ \mathbb{P}(\forall i > 0 \ : \ X_1 + X_2 + \ldots + X_i \neq 0)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée via la propriété de Markov faible : pour n fixé dans $\mathbb{N}$, $(X_{n+i})_i$ est aussi une chaine de Markov, avec même proba de transition que $(X_i)_i$.

Posons $\alpha = \mathbb{P}(\forall i > 0 \ : \ X_1 + X_2 + \ldots + X_i \neq 0)$
On a :

$$\mathbb{P}(B) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$$

Or, par hypothèse, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge, et donc nécessairement $\alpha = 0$, donc $\mathbb{P}(B) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(A) = 1$, et la marche passe une infinité de fois en 0.

□

## 0.3 Via la fonction caractéristique

On cherche, comme précédemment, à déterminer la sommabilité ou non des $\mathbb{P}[S_n = 0]$. Les termes impairs étant nuls, on les omets, et on se contente d'étudier $\mathbb{P}[S_{2n} = 0]$. Posons :

$$\begin{array}{rccl} \phi_d : & \mathbb{R}^d & \to & R \\ & x & \to & \mathbb{E}[e^{i<t,X_1>}] = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} cos(t_i) \end{array}$$

Par indépendance des $(X_i)$, la fonction caractéristique de $S_n$ vaut :

$$\Phi_{S_n}(t) = (\phi_d(t))^n$$

De plus : $\Phi_{S_n}(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}[S_n = p]e^{i<t,p>}$. Cette expression montre que $\Phi_{S_n}(t)$ est une fonction 1-périodique en chacune des d variables de carré intégrable, et $\mathbb{P}[S_n = p]$ est le coefficient de p-ième coefficient de Fourier de $\Phi_{S_n}(t)$.

Donc $\mathbb{P}[S_n = p] = c_p(\Phi_{S_n}) := \int \Phi_{S_n}(y)e^{2\pi i<p,y>}$.
En particulier : $\mathbb{P}[S_n = 0] = \int \Phi_{S_n}(y) = \int(\phi_d(y))^n$.

On peut aussi remarquer que (inversion via Fubini) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]^d} \Phi_{S_n}(t)dt = \sum_p \mathbb{P}[S_n = p]\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \exp(itp)dt = \mathbb{P}[S_n = 0_d]$$

En sommant sur n, on obtient (Tonelli pour l'inversion):

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum \int_{[-\pi,\pi]^d} (\phi_d(y))^{2n} = \int_{[-\pi,\pi]^d} \sum(\phi_d(y))^{2n} = \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \phi_d(y)^2}$$

**Lemme 0.4.** *L'intégrale $\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-\phi_d(y)^2}$ est finie pour d≥3, infinie sinon.*

*Proof.* La fonction $1 - \phi_1(y)^2$ s'annule en 3 points : l'origine $(\pi, \ldots, \pi)$ $(-\pi, \ldots, -\pi)$

On cherche des équivalent de $\frac{1}{1-\phi_1(y)^2}$ en chacun de ces points. Par translation, on peut voir que cela revient à étudier le comportement en 0.

On vérifie qu'en 0, $\frac{1}{1-\phi_1(y)^2} \equiv \frac{d}{||t||^2}$.

Etudions l'intégrale de cette dernière fonction sur une boule centrée en 0, de rayon $\epsilon$. On réalise le changement de coordonées polaire, et on note $S^{d-1}$ la sphère unité en dimension d-1. Il vient :

$\int_{B(O,\epsilon)} \frac{1}{||t||^2} dt = \int_0^\epsilon \int_{S^{d-1}} \frac{1}{r^2} C_d r^{d-1} dr d\alpha = C_d \int_0^\epsilon r^{d-3} dr$

Donc $\frac{1}{||t||^2}$ est intégrable au voisinage de $0 - \mathbb{R}^d$ si $d \geq 3$. A fortiori, il en est de même pour $\frac{1}{1-\phi_1(y)^2}$.

Pour bien faire, faudrait procéder de même pour les points $(\pi, \ldots, \pi)$ et $(-\pi, \ldots, -\pi)$.

□

Par conséquent :

- pour $d \leq 2$, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ est infinie et la marche aléatoire revient un nombre infini de fois en 0.
- pour $d \geq 3$, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ est finie et la marche aléatoire revient un nombre fini de fois en 0.

### 0.4 Remarque : Cas particulier en dimension 1 et 2

On remarque que $S_n \in \{-n, \ldots n\}$. Plus précisément, puisque l'on part de 0, $S_{2n}$ est pair et $S_{2n+1}$ est impair.
Pour arriver en 0 après 2n étapes, il faut avoir fait le même nombre de pas à gauche que à droite, c'est à dire n pas à gauche et n à droite. Il y a $C_{2n}^n$ 2n-uplets comportant autant de pas à gauche que à droite, donc :

$$P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$$

On utilise alors la formule de Stirling pour avoir un équivalent :

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge, ce qui prouve qu'en dimension 1, on repasse une infinité de fois par l'origine.

#### En dimension supérieure

Le même raisonnement combinatoire est possible en dimension supérieure, mais cela devient vite compliqué. Néanmoins, on peut considérer les d coordonnées des pas du marcheur : elles suivent une loi aléatoire sur $\mathbb{Z}$, et sont indépendantes. On a donc :

$$P(S_{2n} = 0) \sim \left( \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^{d/2}$$