Formule sommatoire de Poisson; Application théorème de Shannon

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Zuily Queffelec

0.1 Recasages

Passe à l'aise 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

254 Espaces de SCHWARTZ S(R^d) et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans S(R^d) et S'(R^d)

Arnaques 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

0.2 Le développement

Théorème 0.1.

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum \hat{f}(n)\exp(2i\pi nx)$$

Proof. Étapes :

1/ $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est bien définie, continue 1 périodique

2/ $c_m(g) = \hat{f}(m)$

3/ $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\exp(2i\pi nx)$

Etape 1 $\exists M > 0$ $\alpha > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

Soit $A > 0$ et $|n| \geq 2A$ $\forall x \in [-A, A]$ on a $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq |n|/2$.

donc $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|n|/2)^\alpha}$.

donc $\sum_{\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalemenbt sur tout les compacts de $\mathbb{R}$, donc g est continue.

Enfin $g(x+1) = g(x)$ (changement de variable dans la somme).

Etape 2

$$\begin{aligned} c_m(g) = & \int_0^1 g(t)\exp(-2i\pi mt)dt & (1)\\ = & \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\exp(-2i\pi mt)dt & (2)\\ = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\exp(-2i\pi mt)dt & (3)\\ = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\exp(-2i\pi mt)dt & (4)\\ = & \int_0^\infty f(t)\exp(-2i\pi mt)dt\exp(-2i\pi mt)dt & (5)\\ = & \hat{f}(m) & (6)\end{aligned}$$

Etape 3 Montrons que $\sum |\hat{f}(n)| \leq \infty$. En effet :

$$\begin{aligned} \sum |\hat{f}(n)| = & |\hat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{n^2|\hat{f}(n)|}{n^2} & (7)\\ \leq & N_0(\hat{f}) + N_2(\hat{f})\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/n^2 < \infty & (8)\end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{\mathbb{Z}} c_m(g)\exp(2i\pi mx) \to f(x)$

Comme g continue et sa série de Fourier converge absolument, alors g est somme de sa série de Fourier, donc g(x)=f(x). □

0.3 Application 1 : Théorème d'échantillonage de Shannon

Proposition 0.2. $\Delta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \phi \to \sum_n \phi(n)$

Alors $\Delta \in S'$ *et* $\hat{\Delta} = \Delta$.

Proof. Δ linéaire.

Soit $\phi \in S$, alors $\Delta(\phi) \leq (\pi^2/3+1)N_2(\phi)$ donc $\Delta \in S'$.

Enfin $<\Delta, \phi> = <\Delta, \hat{\phi}> = \sum \hat{\phi}(n) = \sum \phi(n) = <\Delta, \phi>$ donc $\hat{\Delta} = \Delta$. □

Théorème 0.3. *Shannon*

$f \to f\Delta$ *est injective sur* $S \cap BL^2$, *et* $f = \mathcal{F}^{-1}\big(1_{]-1/2,1/2[}\hat{f\Delta}\big)$

Remarque : en fait vrai sur BL^2 tout entier, mais trop long/dur à monter.

Proof. 1/ Heuristique et preuve pour $f \in S \cap BL^2$.

2/ Pour info, le schéma du cas général pour $f \in BL^2$

2.a/ On montre $\exists \phi_n \in S \cap BL^2 \to f$ en norme 2.

2.b/ On montre que dans BL^2, convergence en norme 2 implique convergence en norme $||.||_\infty$.

2.c/ Conclure

Heuristique pour $S \in BL^2$ Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un signal physique (sonore par exemple), que l'on échantillonne, c'est à dire mesure à intervalles régulièrement espacés.

On a donc une collection $\{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$ de mesures expérimentales, et on veut retrouver (recomposer) f à partir de ces mesures.

Supposons $f \in S$. Alors la donnée des $\{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$ équivaut à celle de :

$$f\Delta = \sum_k \phi(k)\delta_k$$

(produit de SxS' défini un élément de S')

$\hat{f\Delta} = \hat{\phi} * \Delta = \sum \hat{\phi}(k+.)$ (convolution de $S * S'$ définie une fonction C^∞ à décroissance au plus polynomiale en l'infini)

Donc en TF, multiplier par Δ (ie échantillonner) revient à ajouter les spectres de ϕ mais décalés de 1.

Montrer sur un schéma que si le spectre a une largeur plus grande que 1, on a recouvrement et donc on ne peut pas retrouver la fonction de départ par TF inverse (pas injectivité).

Pas de pb si f est dans BL^2.

Exemple du cycliste (roue tourne à l'envers) et du son (bande de fréquence entre 20Hz et 20kHz).

Cas général a/ Par densité de S dans BL^2, $\phi_n \in S \to f$ en norme 2. Donc par Plancherel, $\hat{\phi}_n \in S \to \hat{f}$.

Par contre, les ϕ_n ne sont à priori pas dans BL^2. Définissons $\tilde{\phi}_n$ tel que :

$$\hat{\tilde{\phi}}_n = \phi_n \Xi_n$$

où Ξ_n est une fonction plateau valant 0 en dehors de $[-1/2, 1/2]$ et 1 sur $[-1/2 + 1/n, 1/2 - 1/n]$. Alors :

$$\begin{aligned} ||\tilde{\phi}_n - f||_2 = \quad & ||\hat{\tilde{\phi}}_n - \hat{f}||_2 \quad \text{par Plancherel} && (9)\\ = \quad & ||\phi_n \Xi_n - \hat{f}||_{L^2(I)} && (10)\\ & \to_n 0 \quad \text{par convergence dominée} && (11) \end{aligned}$$

b/

$$\begin{aligned} |u(x)| = & \int_I \hat{u}(y) \exp(2i\pi xy) dy && \text{car} \hat{u} \in L^1 && (12)\\ \leq & ||\hat{u}||_{L^2(I)} ||1||_{L^2(I)} && \text{par Cauchy Schwarz} && (13)\\ \leq & ||u||_2 && \text{par Plancherel} && (14)\\ ||u||_\infty \leq ||u||_2 & && && (15) \end{aligned}$$

Donc convergence en norme 2 implique convergence en $||.||_\infty$.

□

0.3.1 Compléments

Proposition 0.4.

$$BL^2 := \{f \in L^2 : \hat{f} = 0 \textit{presque partout en dehors de]-1/2,1/2[}\}$$

BL^2 est un Hilbert, de base (sinc). Toute fonction de BL^2 admet un représentant continu.

0.4 Formule de Jacobi

Proposition 0.5.

$$\forall s > 0 \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 s) = s^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi k^2/s)$$

Proof. Poisson à $f(x) = \exp(-\alpha x^2)$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha^2} e^{-2i\pi nt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi nu/\sqrt{\alpha}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

□

Remarque : $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$ (fonction théta de Jacobi), alors

$$\sqrt{s}\Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\pi/s})$$

Alors le comportement de Θ en x=1 est lié à son comportement en x=0.

Proposition 0.6. *Godement, Analyse II, p.367*

$$\theta(z) := \sum \exp(\pi i n^2 z) \quad Im(z) > 0$$

$$\theta(-1/z) = (z/i)^{1/2} \theta(z)$$

Proof. Plusieurs étapes

Notations et position du problème Posons $f(t,z) := e^{\pi i z t^2}$ et z=x+iy. On a alors $|f(t,z)| = e^{-\pi y t^2}| = q^{t^2}$ où $q = e^{-\pi y}$.

Si $y < 0$ alors $q > 1$, donc $\sum |f(t,z)|$ diverge. Par contre, si $y > 0$, alors $q < 1$ et la somme converge, car à z fixé (de partie imaginaire positive), $f(t,z) = O(t^{-N})$ quand t tend vers l'infini, quelque soit N positif.

$$\hat{f}(u,z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ut} e^{\pi i z t^2} dt = \int g(t,z) dt$$

Holomorphie sous $\int$ Posons $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Pour z fixé dans Ω, la fonction $t \mapsto g(t,z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour t réel, $z \mapsto g(t,z)$ est holomorphe. Enfin, on a majoration sur tout compact : soit H compact de Ω, alors $Im(z) \geq m > 0$ et donc

$$\forall z \in H : \forall t \in \mathbb{R} \quad |g(t,z)| = e^{-\pi Im(z)t^2} \leq e^{-\pi m t^2}$$

Donc par holomorphie sous $\int$, $\hat{f}(u,z)$ est holomorphe sur Ω (u étant fixé).

Prolongement analytique Pour z=iy (imaginaire pur, avec $y > 0$), on retrouve avec bonheur la transformée de Fourier d'une gaussienne.

$$f(u,iy) = \int e^{-2i\pi ut} e\pi y t^2 dt \tag{16}$$
$$= \int \ell^{-2i\pi u y^{-1/2} t} e^{-\pi t^2} u^{-1/2} dt \tag{17}$$
$$= y^{-1/2} e^{-\pi u^2/y} \tag{18}$$

(changement de variable $t \mapsto y^{-1/2}t$ puis on retrouve la TF de $e^{-\pi t^2}$ en $yy^{-1/2}$).

Posons

$$F(u,z) = (z/i)^{-1/2} \exp(-\pi i u^2/z)$$

Où l'on a utilisé la racine carré complexe. Pour $z \in \Omega$, $z/i = \xi$ avec $Re(\xi) > 0$, et

$$\xi^{-1/2} := |\xi|^{-1/2} e^{-i/2 arg(\xi)} \quad |arg(\xi)| < \pi$$

$$(z/i)^{1/2} = |z|^{-1/2} e^{-i/2 arg(z/i)} \quad |arg(z/i)| < \pi$$
$$arg(z/i) = arg(z) - \pi/2 \quad 0 < arg(z) < \pi$$

Application de la formule de Poisson On a

$$\sum \exp[\pi i z(t+n)^2] = (z/i)^{-1/2} \exp(-\pi i n^2/z + 2i\pi n t)$$

On a bien la formule souhaitée. Au passage, on utilise :

$$im(z) > 0 \Rightarrow Im(-1/z) > 0$$

□

0.4.1 Compléments

Proposition 0.7. *TF de la gaussienne*

$$a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2\xi^2/a}$$