Formule sommatoire de Poisson

Maximilien Dreveton

June 18, 2016

Références Gourdon, Godement, (Zuily Queffelec)

Théorème 0.1.

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum \hat{f}(n)\exp(2i\pi nx)$$

Proof. Étapes :
1/ $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est bien définie, continue 1 périodique
2/ $c_m(g) = \hat{f}(m)$
3/ $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\exp(2i\pi nx)$

Etape 1 $\exists M > 0$ $\alpha > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

Soit $A > 0$ et $|n| \geq 2A$ $\forall x \in [-A, A]$ on a $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq |n|/2$.

donc $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|n|/2)^\alpha}$.

donc $\sum_{\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalemenbt sur tout les compacts de $\mathbb{R}$, donc g est continue.

Enfin $g(x+1) = g(x)$ (changement de variable dans la somme).

Etape 2

$$\begin{aligned}
c_m(g) &= \int_0^1 g(t)\exp(-2i\pi mt)dt && (1)\\
&= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\exp(-2i\pi mt)dt && (2)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\exp(-2i\pi mt)dt && (3)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\exp(-2i\pi mt)dt && (4)\\
&= \int_0^\infty f(t)\exp(-2i\pi mt)dt\exp(-2i\pi mt)dt && (5)\\
&= \hat{f}(m) && (6)
\end{aligned}$$

Etape 3 Montrons que $\sum |\hat{f}(n)| \leq \infty$. En effet :

$$\begin{aligned} \sum |\hat{f}(n)| = & \quad |\hat{f}(0)| + \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{n^2|\hat{f}(n)|}{n^2} && (7) \\ \leq & \quad N_0(\hat{f}) + N_2(\hat{f}) \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/n^2 < \infty && (8) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{\mathbb{Z}} c_m(g) \exp(2i\pi mx) \to f(x)$

Comme g continue et sa série de Fourier converge absolument, alors g est somme de sa série de Fourier, donc g(x)=f(x). □

Proposition 0.2. $\Delta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \phi \to \sum_n \phi(n)$

Alors $\Delta \in S'$ *et* $\hat{\Delta} = \Delta$.

Proof. Δ linéaire.

Soit $\phi \in S$, alors $\Delta(\phi) \leq (\pi^2/3 + 1)N_2(\phi)$ donc $\Delta \in S'$.

Enfin $< \Delta, \phi >=< \Delta, \hat{\phi} >= \sum \hat{\phi}(n) = \sum \phi(n) =< \Delta, \phi >$ donc $\hat{\Delta} = \Delta$. □

Proposition 0.3.

$$\forall s > 0 \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 s) = s^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi k^2/s)$$

Proof. Poisson à $f(x) = \exp(-\alpha x^2)$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha^2} e^{-2i\pi nt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi nu/\sqrt{\alpha}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

□

Remarque : $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$ (fonction théta de Jacobi), alors

$$\sqrt{s}\Theta(e^{-s\pi}) = \Theta(e^{-\pi/s})$$

Alors le comportement de Θ en x=1 est lié à son comportement en x=0.

Proposition 0.4. *Godement, Analyse II, p.367*

$$\theta(z) := \sum \exp(\pi i n^2 z) \quad Im(z) > 0$$

$$\theta(-1/z) = (z/i)^{1/2} \theta(z)$$

Proof. Plusieurs étapes

Notations et position du problème Posons $f(t,z) := e^{\pi i z t^2}$ et z=x+iy. On a alors $|f(t,z)| = e^{-\pi y t^2}| = q^{t^2}$ où $q = e^{-\pi y}$.

Si $y < 0$ alors $q > 1$, donc $\sum |f(t,z)|$ diverge. Par contre, si $y > 0$, alors $q < 1$ et la somme converge, car à z fixé (de partie imaginaire positive), $f(t,z) = O(t^{-N})$ quand t tend vers l'infini, quelque soit N positif.

$$\hat{f}(u,z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ut} e^{\pi i z t^2} dt = \int g(t,z) dt$$

Holomorphie sous $\int$ Posons $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Pour z fixé dans Ω, la fonction $t \mapsto g(t,z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour t réel, $z \mapsto g(t,z)$ est holomorphe. Enfin, on a majoration sur tout compact : soit H compact de Ω, alors $Im(z) \geq m > 0$ et donc

$$\forall z \in H : \forall t \in \mathbb{R} \quad |g(t,z)| = e^{-\pi Im(z) t^2} \leq e^{-\pi m t^2}$$

Donc par holomorphie sous $\int$, $\hat{f}(u,z)$ est holomorphe sur Ω (u étant fixé).

Prolongement analytique Pour z=iy (imaginaire pur, avec $y > 0$), on retrouve avec bonheur la transformée de Fourier d'une gaussienne.

$$f(u,iy) = \int e^{-2i\pi ut} e\pi y t^2 dt \tag{9}$$
$$= \int \ell^{-2i\pi u y^{-1/2} t} e^{-\pi t^2} u^{-1/2} dt \tag{10}$$
$$= y^{-1/2} e^{-\pi u^2/y} \tag{11}$$

(changement de variable $t \mapsto y^{-1/2} t$ puis on retrouve la TF de $e^{-\pi t^2}$ en $yy^{-1/2}$).

Posons

$$F(u,z) = (z/i)^{-1/2} \exp(-\pi i u^2/z)$$

Où l'on a utilisé la racine carré complexe. Pour $z \in \Omega$, $z/i = \xi$ avec $Re(\xi) > 0$, et

$$\xi^{-1/2} := |\xi|^{-1/2} e^{-i/2 arg(\xi)} \quad |arg(\xi)| < \pi$$

$$(z/i)^{1/2} = |z|^{-1/2} e^{-i/2 arg(z/i)} \quad |arg(z/i)| < \pi$$
$$arg(z/i) = arg(z) - \pi/2 \quad 0 < arg(z) < \pi$$

Application de la formule de Poisson On a

$$\sum \exp[\pi i z (t+n)^2] = (z/i)^{-1/2} \exp(-\pi i n^2/z + 2i\pi n t)$$

On a bien la formule souhaitée. Au passage, on utilise :

$$im(z) > 0 \Rightarrow Im(-1/z) > 0$$

□

Proposition 0.5. *TF de la gaussienne*

$$a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi^2/a}$$