Méthode de la phase stationnaire

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Candelpergher , Queffelec-Zuily p.333

0.1 Recasages

Passe à l'aise 218 Applications des formules de TAYLOR.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

0.2 Le développement

On s'intéresse au comportement en l'infini de :

$$F(x) := \int_a^b e^{ix\phi(t)} f(t)dt \quad f, \phi \in c^\infty(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Théorème 0.1. *Supposons ϕ s'annule en un unique $t_0 \in [a,b]$, et tel que $\phi''(t_0) \neq 0$. Alors*

$$\int_a^b e^{ix\phi(t)} f(t)dt = e^{ix\phi(t_0)} f(t_0) \frac{\sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{|\phi''(t_0)|}} e^{sgn(\phi''(t_0))i\pi/4} \frac{1}{sqrtx} + O(\frac{1}{x})$$

Lemme 0.2. *Lemme de compensation, ou méthode de la phase NON stationnaire.*

Supposons que $\phi' \neq 0$ sur $[c,d]$. Alors

$$\int_c^d e^{ix\phi(t)} f(t)dt = O(1/x)$$

Proof. IPP

$$\int_c^d e^{ix\phi(t)} \phi'(t) \frac{f(t)}{\phi'(t)} dt = \frac{1}{ix} \left[e^{ix\phi(t)} \frac{f(t)}{\phi'(t)} \right]_c^d - \frac{1}{ix} int_c^d e^{ix\phi(t)} \left(\frac{f(t)}{\phi'(t)} \right)' dt \tag{2}$$

□

Proof. Preuve du théorème

Pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\int_a^b e^{ix\phi(t)} f(t)dt = \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} e^{ix\phi(t)} f(t)dt + O(\frac{1}{x}) \tag{3}$$

Changement de variable Par Taylor : $\phi(t) = \phi(t_0) + \frac{\phi''(t_0)}{2}(t-t-0)^2(1+\rho(t)(t-t_0)$

Posons $\psi(t) := \frac{\sqrt{|\phi''(t_0)|}}{\sqrt{2}}(t-t_0)\sqrt{1+\rho(t)(t-t_0)}$ On a :

$$\psi(t) \approx_{t_0} \frac{\sqrt{|\phi''(t_0)|}}{\sqrt{2}}(t-t_0)$$

$$\psi'(t_0) = \frac{\sqrt{|\phi''(t_0)|}}{\sqrt{2}}$$

Donc quitte à diminuer α, ψ est localement un C^1 difféomorphisme de $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ vers $[\beta_-, \beta^+]$.

Effectuons le changement de variable $s = \psi(t)$.

$$\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} e^{ix\phi(t)} f(t)dt = e^{ix\phi(t_0)} \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} e^{ix\, sgn(\psi''(t_0))s^2}\, f(\psi^{-1}(s))\, |\partial\psi^{-1}(s)| ds dt \tag{4}$$

Posons $g(s) = f(\psi^{-1}(s))\, |\partial\psi^{-1}(s)|$ De plus, $\psi(t_0) = 0$, donc

$$g(0) = f(t_0)\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(0))} \tag{5}$$

$$= f(t_0)\frac{1}{\psi'(0)} \tag{6}$$

$$= f(t_0)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\phi''(t_0)|}} \tag{7}$$

Le lemme suivant permet de conclure.

□

Lemme 0.3.

$$\int_{\beta_-}^{\beta^+} e^{\pm ixs^2} g(s)ds = g(0)\frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pm i\pi/4}\sqrt{\pi} + O(\frac{1}{x})$$

Proof.

$$g(s) = g(0) + s\ h(s)$$

$$int_{\beta_-}^{\beta^+} e^{\pm ixs^2} g(s)ds = g(0) int_{\beta_-}^{\beta^+} e^{\pm ixs^2} ds + int_{\beta_-}^{\beta^+} e^{\pm ixs^2} sh(s)ds \tag{8}$$

La deuxième intégrale est un O(1/x) par le lemme de la phase non stationnaire. Notons I la première intégrale.

$$I = g(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2}dt - g(0)\left[\int_{-\infty}^{\beta_-} e^{\pm it^2}dt + \int_{\beta^+}^{\infty} e^{\pm it^2}dt\right] \tag{9}$$

$$= g(0)\frac{1}{sqrtx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2}dt + O(\frac{1}{x}) \tag{10}$$

$$= g(0)\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\pm i\pi/4}\sqrt{\pi} + O(\frac{1}{x}) \tag{11}$$

□

0.3 Compléments

Proposition 0.4. *Intégrale de Fresnel*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2}dt = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}$$

Proof.

$$z = ee^{-i\pi/4}t \Rightarrow -z^2 = it^2$$

Donc par le théorème des résidus :

$$\int_0^{\infty} e^{it^2}dt = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi} = \lim_{R\to\infty}\int_d e^{-z^2}dz$$

Où d est le contour formé des droite $[0, R]$ dans la direction $-\pi/4$ et $[0, R]$ sur l'axe des abscisse ainsi que le quart de cercle les reliant.

L'intégrale sur l'axe des abscisses donne l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-x^2}$.

Celle dans la direction $-\pi/4$ donne l'intégrale de Fresnel.

On majore celle sur l'arc de cercle γ_R :

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = R\int_{-\pi/4}^{0} e^{-R^2e^{2i\cdot\theta}}ie^{i\theta}d\theta \tag{12}$$

$$\leq R\int_{-\pi/4}^{0} e^{-R^2cos(2\theta)}d\theta \tag{13}$$

$$\leq R\int_{-\pi/4}^{0} e^{-R^2(\frac{4}{\pi}\theta+1)}d\theta \tag{14}$$

$$\leq \frac{\pi}{4}\frac{1-e^{-R^2}}{R} \to 0 \tag{15}$$

On conclut.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2}dt = 2\int_0^{\infty} e^{it^2}dt = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi} \tag{16}$$

□