Théorème de Montel

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Rudin (voir à famille normale, détaille pas trop)

Ycher (fait tout sans Ascoli), Amar, Bony p.38 (pour la construction d'une exhaustion compacte)

0.1 Recasages

Passe à l'aise 201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

Arnaques

0.2 Le développement

1 Théorème de Montel

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1.1. *Soit $F \in H(\Omega)$. Alors :*

F relativement compacte $\iff$ F uniformément bornée sur tout compact.

Proof. Sens direct

Soit F une partie relativement compact de $H(\Omega)$, et supposons par l'absurde que F n'est pas uniformément bornée.

Autrement dit : $\exists K \in\in \Omega / \forall M > 0 \exists z_M \in K \exists f_M \in F : f_M(z_M) > M$ En prenant M=n, on obtient une suite (f_n) telle que pour tout n, il existe $z_n \in K / f_n(z_n) > n$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_n$ n'est pas bornée sur K.

Or F est relativement compact, donc il existe une extraction de (f_n) qui converge vers une fonction g, uniformément sur tout compact (en particulier sur K). La convergence étant uniforme, g est continue, donc bornée sur K : ce qui est en contradiction avec (f_n) non bornée.

Conclusion : F est uniformément bornée sur tout compact.

Sens retour :

Considérons dans un premier temps une exhaustion compacte de Ω, cad une suite de compact (K_n) telle que :

- $\Omega = \bigcap K_n$ avec $K_n \Subset K_{n+1} \Subset K_{n+1}$
- $\forall K \Subset \Omega \exists n \in \mathbb{N}/K \in K_n$ Par exemple, on peut prendre $K_n = \{z \in \Omega/|z| \leq n$ et $d(z, \Omega^c) \geq 1/n\}$

De plus, considérons δ_n tel que $\forall z \in K_n, D(z, 2\delta_n) \in K_{n+1}$

Enfin, posons $F_{|K_n} = \{f_{K_n}/f \in F\}$

On va maintenant montrer que $\forall n, F_{|K_n}$ est compact, en utilisant Ascoli.

- Soit $z \in K_n$, alors la partie $F_{|K_n]}(z) = \{f(z)/f \in F\}$ est bornée (car par hypothèse F est bornée sur tout compact et K_n est compacte), et son adhérence est fermée : donc son adhérence est compacte, donc $F_{|K_n]}(z)$ est relativement compacte pour tout z
- Soient $z, z' \in K_n$ tel que $d(z, z') < \delta_n$ et γ le cercle de centre z_n et rayon $2\delta_n$. Alors (formule de Cauchy) :

$$\begin{array}{rcl} \text{f(z)-f(z')} & = & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z'}d\xi \\ & = & \frac{1}{2i\pi}(z - z')\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z')}d\xi \end{array}$$

  Pour majorer cette expression, on remarque que :

$$|\xi - z| = 2\delta_n$$

$$|\xi - z| \geq \delta_n$$

$$\forall \xi \in \gamma |f(\xi)| \leq M(K_{n+1})$$

  La dernière inégalité vient du fait que la famille F est bornée sur tout compact, donc sur K_{n+1} par une constance notée $M(K_{n+1})$, et que $\gamma \in K_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcl} |f(z) - f(z')| & \leq & \frac{1}{2\pi}|z - z'|\int_\gamma |\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z')}|d\xi \\ & \leq & \frac{1}{2\pi}|z - z'|\int_\gamma |\frac{M(K_{n+1})}{(2\delta_n)(\delta_n)}|d\xi \\ & \leq & \frac{M(K_{n+1})}{2\pi 2\delta_n^2}2\pi 2\delta_n|z - z'| \\ & \leq & Cte(K_{n+1})|z - z'| \end{array}$$

  Il est important de noter que la constance ne dépend que du compact K_{n+1}, et pas de la fonction f. Donc la famille est équilipschitzienne, donc équicontinue.

  Conclusion : d'après Ascoli, $\forall n, F_{|K_n}$ est compact.

Deuxième étape : procédé diagonal

Sur chaque K_p, on peut extraire une suite $(f_{\phi_p(n)})_n$ qui converge uniformément sur K_p.

Posons $\psi(n) = \phi_1\phi_2 \dots \phi_n(n)$. Alors la suite $(f_{\psi(n)})_n$ converge sur tous les K_p, en tant que suite extraite de $(f_{\phi_1 \dots \phi_p(n)})_{n \geq p}$.

Enfin, soit K un compact de Ω. Alors K est inclue dans l'un des K_p, donc la suite $(f_{\psi(n)})_n$ converge dans K.

Enfin, on dispose d'une suite $(f_{\psi(n)})_n$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω. Donc la limite est holomorphe, voir rappel, ($H(\Omega)$ fermé, (se prouve via Cauchy (fonction holo ssi intégrale sur tout contour fermé est nul)).

Ceci achève la preuve.

$\square$

Vrac:

Procédé diagonal : autre rédaction

Soit (f_n) une suite d'éléments de F. Comme $F_{|K_1}$ est compact, on peut extraire une sous suite de (f_n), notée $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur le compact K_1.

De cette suite, on peut en extraire une nouvelle, notée $(f_{\phi_1(\phi_2(n))})_n$ qui converge sur K_2 (mais aussi sur K_1 en tant que suite extraite de $(f_{\phi_1(n)})_n$).

On itère le procédé.