# Galton Watson

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Toulouse (le fait avec une application concrète faisant intervenir des homographies; ça devient plus interessant et mieux recasable)

Sinon Ouvrard

## 0.1 Recasages

Passe à l'aise 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications. (à condition de faire intervenir les homographies)

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence un+1 = f(un). Exemples et applications.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Arnaques 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

## 0.2 Le développement

On considère l'évolution d'une population. On note $Z_n$ la taille de la population à la génération n. On s'interesse à la probabilité d'extinction de la population. On modélise l'évolution suivant un processus simple. Chaque individu a des enfants suivant une loi X, indépendant des autres. Autrement dit, le nombre d'individu à la génération n+1 s'exprime comme suit :

$Z_{n+1} = 1_{\{Z_n \geq 1\}} \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n,j}$

où les $(X_{n,j})$ sont iid et ont la loi de X.

**Proposition 0.1.** *$Z_n$ independant de $X_{i,j}$.*

Introduisons les fonctions génératrices :

$$G_n(s) = E(s^{Z_n})$$

$$G(s) = E(s^X)$$

**Proposition 0.2.** *$G_{n+1}(s) = G_n(G(s))$*

*Proof.*

$$\begin{array}{rcl} G_{n+1}(s) & = & E[s^{Z_{n+1}}] \\ & = & E[E[S^{Z_{n+1}}|Z_n]] \\ & = & E[E[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}|Z_n]] \\ & = & E[E[1 + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{Z_n=j\}} s^{\sum_{j=1}^{\infty} X_{i,n}}]] \\ & = & E[1 + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{Z_n=j} E[s^{\sum_{i=1}^{j} X_{i,n}}] \\ & = & E[1 + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{Z_n=j} (E(s^X))^j] \\ & = & E(G(s)^{Z_n}) \\ & = & G_n(G(s)) \end{array}$$

□

Comme $G_0 = 1$, $G_n$ est la composée n fois de G.

**Proposition 0.3.** *G est croissante (strictement si $p_0 < 1$).*
*G est convexe (strictement si $p_0 + p_1 \neq 1$).*

$$\begin{array}{rcl} P_{extinction} & = & \mathrm{P}[\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0] \\ & = & \lim_n P[Z_n = 0] \\ & = & \lim_n G_n(0) \end{array}$$

Or la suite $(P[Z_n = 0])$ est croissante, majorée par 1, donc converge vers $p_{ext}$.

**Proposition 0.4.** *$p_{ext}$ est le plus petit point fixe de G*

*Proof.* $G_n(0) --> p_{ext}$ Donc $G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) --> G(p_{ext})$

Donc par unicité de la limite, $G(p_{ext}) = p_{ext}$.

Soit u un point fixe de G, différent de $p_{ext}$. Alors $G(0) < G(u) = u$ Puis par croissance de G, on trouve par récurrence $G(G_n(0)) < G(u) = u$

d'où par passage à la limite $p_{ext} \leq u$

□

Autrement dit, $p_{ext}$ est la plus petite racine de h(x)=G(x)-x

Etude de cas :

On pose m=E(x)=G'(1).

Alors :

Si $m > 1$ : alors par convexité de G, un seul point fixe dans [0,1[.

Si $m < 1$ : Un unique point fixe = 1 donc extinction presque sure

Si m=1 : idem, unique point fixe = 1, extinction presque sure.

(Faire des dessins)