Equation différentielle linéarisée autour d'une orbite périodique. Théorie de Floquet.

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Aucune

0.1 Recasages

Passe à l'aise 220 Équations différentielles X' = f(t,X). Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

0.2 Le développement

0.2.1 Théorème de Floquet

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} = A(t)u \tag{1}$$

où A est une matrice réelle, continue, T-périodique, et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On a le résultat suivant :

Théorème 0.1. *Il existe $t \to Q(t) \in M(\mathbb{R})$ T-périodique et inversible pour tout temps t et une matrice constante Λ telle que :*

(i) L'ensemble des solutions de 1 s'écrive $u(t) = Q(t)\exp(\Lambda t)u_0$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$

(ii) La matrice résolvante R=R(t,0) donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \frac{dR}{dt} & = & A(t)R(t) \\ R(0) & = & Id \end{array} \tag{2}$$

est égale à R(t)=Q(t) $\exp(\Lambda t)$

(iii) Le changement de variable u(t)=Q(t)v(t) transforme 1 en une équation à coefficient constant $\frac{dv}{dt} = \Lambda v$

Remarques Les valeurs propres de Λ sont appelés les exposants de Floquet. Ils ne sont pas uniques (définis à $2\pi i/T$ près).

Les valeurs propres de $\exp(\Lambda T)$ sont appelés les multiplicateurs de Floquet. Ils sont intrinsèques au problème étudié.

Lorsque $A(t) = DV(p(t))$ où p est une orbite périodique de $\dot{p} = V(p)$, alors le signe des parties réelles des exposants de Floquet donne la stabilité de l'orbite périodique.

Proof. On raisonne par analyse-synthèse

ANALYSE: Supposons que l'on ait $R(t) = Q(t)\exp(\Lambda t)$, alors :
R(0)=Q(0)=Id et
$R(T) = Q(T)\exp(\Lambda T) = Q(0)\exp(\Lambda T) = \exp(\Lambda T)$
Donc nécessairement, $\exp(\Lambda T) = R(T)$

SYNTHÈSE R(T) est une matrice inversible (réelle), donc il existe une matrice complexe Λ telle que $R(T) = \exp(\Lambda T)$

Posons $Q(t) = R(t)\exp(-\Lambda t)$, et montrons que Q est T-périodique inversible.
Q inversible car produit de deux matrices inversibles.

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= R(t+T)\exp(-(t+T)\Lambda) \\ &= R(t+T)R^{-1}\exp(-t\Lambda) \quad \text{car } R(T) = \exp(\Lambda T) \end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il reste à montrer que $R(t+T)R^{-1}(T) = R(t)$
On sait que R(0)=Id et $\frac{dR}{dt} = A(t)R$ Donc $\frac{d(R(t+T)R^{-1}(T))}{dt} = A(t+T)R(t+T)R^{-1}(T) = A(t)R(t+T)R^{-1}(T)$

Donc R(t) et R(t+T) sont toutes deux solutions de

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= A(t)\tau \\ \tau(0) &= Id \end{aligned} \tag{3}$$

qui est un problème de Cauchy. Par unicité des solutions, on conclut :

$$R(t) = R(t+T)R^{-1}(T)$$

□

Proposition 0.2. *Les multiplicateurs de Floquet sont intrinsèque au problème étudié.*

Proof. Soit $\tilde{R(t)}$ une autre matrice résolvante de l'équation 1. Alors la preuve du théorème 0.1 assure l'existence de matrices Λ et $\tilde{\Lambda}$ telles que :

$$R(t+T) = R(t)\exp(\Lambda T)$$
$$\tilde{R}(t+T) = \tilde{R}(t)\exp(\tilde{\Lambda}T)$$

De plus, comme R et $\tilde{R}$ sont deux matrices résolvantes, il vient $R(t) = \tilde{R}(t)C$ où C est une matrice inversible. Donc $R(t+T) = \tilde{R}(t+T)C$, et en poursuivant les calculs il vient assez facilement que : $C\exp(\tilde{\Lambda}T)C^{-1} = \exp(\Lambda T)$. Donc les valeurs propres de $\exp(\Lambda T)$ et $\exp(\tilde{\Lambda}T)$ sont les même. □

0.2.2 Stabilité des solutions

En reprenant les notations du théorème 0.1, on a $u(t) = Q(t)\exp(\Lambda t)u_0$.

Une base de solution de l'équation 1 est donnée par : $u_j(t) = Q(t)\exp(\mu_j t)u_{j,0}$, où les μ_j sont valeures propres de Λ (déterminées à $2\pi i/T$ près, mais c'est leur partie réelle qui va jouer un rôle dans la suite).

Donc : $u_j(t+T) = \rho_j u_j(t)$, et par une récurrence directe : $u_j(t+NT) = \rho_j^N u_j(t)$. La valeur de ρ_j nous donne une information sur la stabilité des solutions.

Proposition 0.3. *Soit $u_j(t) = Q(t)\exp(\mu_j t)u_j, 0$ solution de l'équation 1.*

(i) Si $|\rho_j| < 1$, alors $u_j(t) \to 0$.

(ii) Si $|\rho| = 1$, alors $u_j(t)$ est pseudo périodique.
Si $\rho = +/-1$, alors $u_j(t)$ est périodique.

(iii) Si $|\rho| > 1$, alors $u_j(t) \to \infty$.

Les solutions sont stables si tous les multiplicateurs de Floquet vérifient $|\rho| \leq 1$

Remarque Comme $\rho_j = \exp(\mu_j T)$, le caractère de stabilité revient à dire que la partie réelle des μ_j est négative (ou nulle).

0.2.3 Linéarisation autour d'une orbite périodique

Supposons que l'équation $\dot{u} = V(u, \lambda)$ admette ue solutions particulière p, T-périodique.

Alors on peut appliquer le théorème précédent à l'équation linéarisée autour de cette solution : $\dot{v} = A(t).v$ où $A(t) = D_v V(p(t))$ car A(t) est T-périodique.

On a: $\dot{p} = V(p, \lambda)$, donc : $p'' = D_p V(p(t))\dot{p}$ Autrement dit : $\dot{p}$ est une solution de $\dot{v} = A(t).v$.

Or $\dot{p}$ est périodique, donc il au moins l'un des exposants de Floquet est égal à 1 !

0.2.4 Cas particulier : n=2

On rappelle le lemme du Wronskien.

Lemme 0.4. *(Wronskien)*

$\det(R(t)) = \exp(\int_0^t tr(A(s))ds)$

En particulier, $det(R(T)) = \prod_{i=1}^n \rho_i = \exp(\int_0^T tr(A(s))ds)$

Considérons un problème de la forme 1, où u est un vecteur de taille 2. Supposons qu'il existe une solution T-périodique. Alors, un des deux exposants de Floquet (notés ρ_1 et ρ_2)est égal à 1, par exemple $\rho_1 = 1$. L'autre valeur propre est aussi réelle.

Par le lemme du Wronskien, on a :

$$\rho 1 \rho_2 = exp(\int_0^T tr(A(s)ds))$$

$$\rho_2 = exp(\int_0^T tr(A(s)ds))$$

.

La solution est stable ssi $\rho_2 \leq 1$, ce qui se traduit par :

$$0 > \int_0^T tr(A(s)ds)$$

$$0 > \int_0^T \Big(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\Big)_{p(t)}$$

$$0 > \int_0^T \nabla|_{x=p} V ds$$