Extrémas liés

Maximilien Dreveton

July 3, 2016

Références

0.1 Recasages

Passe à l'aise 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn. Exemples et applications.

217 Sous variétés de Rn. Exemples.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Arnaques 218 Applications des formules de TAYLOR.

En algèbre leçon sur la dualité ou dimension finie d'un ev (pousse un peu loin quand même)

0.2 Le développement

Théorème 0.1. *f présente un extremum lié en m sur la sous variété M, il faut que la restriction de Df(m) à l'espace tangent de M en m T_mM soit nul. (c'est à dire $T_mM \subset KerDf(m)$).*

Proof. $v \in T_mM$, $\gamma : I \to E$ courbe différentiable tracée sur M, d'origine m et de vecteur vitesse initial v. On a :

$$\forall t \in I \quad (f_{M\cap U}) \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t) \tag{1}$$

Donc

$$T_m(f_{M\cap U}) \circ v = T_m f \circ v = Df(m).v = \frac{d}{dt}[f \circ \gamma](0) = 0 \tag{2}$$

□

Lemme 0.2. *Soient $a, b_1, \ldots, b_k$ des formes linéaires sur ev E dim E=n. Supposons $b_1, \ldots, b_k$ linéairement indépendantes et $\bigcap_{i=1}^{k} Kerb_i \subset Kera$, alors a est Cl des b_i.*

Proof. On complète $(b_1,\dots,b_k)$ en une base de E^* $(b_1,\dots,b_n)$, et on note $(e_1,\dots,e_n)$ la base antéduale.

Donc $\exists c_i$ tel que $a=\sum c_i.b_i$.

Or $\bigcap Kerb_i = Vect(e_a,\dots,e_n)$.

donc $0=a(e_r)=\sum c_ib_i(e_r)=c_r$ pour $r=k+1,\dots,n$.

donc $a=c_1b_1+\dots c_kb_k$. □

Théorème 0.3. *Extrémas liés / Multiplicateurs de Lagrange*

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n =: E$ et $g_1,\dots,g_k$ C^1 : $U\to\mathbb{R}$. avec $(Dg_i(u))$ linéairement indépendantes en chaque point $u\in U$.

$$M := \{x\in\mathbb{R}^n : g_1(x)=\cdots=g_k(x)=0\}$$

M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f: U\to\mathbb{R}$ différentiable. Alors pour que f présente un extrémum lié en $m\in U$ sur M, il faut qu'il existe des constantes λ_i (appelées multiplicateurs de Lagrange) telles que :

$$Df()=c_1Dg_1(m)+\cdots+c_kDg_k(m)$$

Proof. $T_mM=\bigcap_{i=1}^k KerDg_i(m)$ $T_mM\subset KerDf(m)$ par le théorèmé précédent.

Donc par le lemme, on a l'existence des constantes λ_i. □

Proposition 0.4. *Soit $u\in S_n(\mathbb{R})$. Alors u est diagonalisable en une base orthonormée.*

Proof. Introduisons $f: E\to\mathbb{R}; x\mapsto < u(x),x >$. f est différentiable, donc atteint son maximum sur la sphère unité (compacte!) en un vecteur $e_1\in E$.

Pour trouver e_1, on cherche l'extrema lié de f astreint à $g(x) := < x,x > = 1$

$$Df(x).h = < u(x),h > + < u(h),x > \tag{3}$$
$$= 2 < u(x),h > \tag{4}$$
$$Dg(x).h = 2 < x,h > \quad h\in E \tag{5}$$

La relation $Df(e_1)=c.Dg(e_1)$ s'écrit alors $u(e_1)=ce_1$ où $f(e_1) = < u(e_1),e_1 > = c$.

Un point e_1 de $S=g^{-1}(1)$ où f est maximum est donc un vecteur propre de u, de valeur propre maximum.

Maintenant, si $< y,e_1 > = 0$ on a $< u(y),e_1 > = < y,u(e_1) > = c < y,e_1 > = 0$, donc $F=(Vect(e_1))^\perp$ est invariant par u.

Donc u_F est encore symétrique, avec $\dim F=\dim E-1$: on finit par récurrence. □

0.3 Compléments