Équation de la chaleur avec condition aux limites périodique

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Candelpergher, FGN Analyse4 , Zuily Queffelec ?

0.1 Recasages

Passe à l'aise 202 Exemples de parties denses et applications.

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

0.2 Le développement

Théorème 0.1. *Soit f C^2 bornée sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution u définie sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ qui est C^1 en t et C^2 en x telle que :*

$$(C) \quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}\ \forall t > 0 \\ \lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Précision : En t : f est continue en $t \in [0,\infty[$ et C^1 (en fait C^∞) sur $]0,\infty[$. En x c'est plus simple, f est C^2 (en fait C^∞) sur $\mathbb{R}$.

Proof. On raisonne par analyse-synthèse

Analyse On va supposer que u solution est en fait de classe C^∞ (en fait C^3 en x suffirait et C^2 en y).

La fonction $x \mapsto u(x,t)$ est C^1 donc est somme de sa série de Fourier (qui converge uniformément), et on peut écrire :

$$\forall t > 0 \quad u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) \exp(2i\pi nx) \quad \text{où } c_n(t) = \int_0^1 u(x,t)\exp(-2i\pi nx)dx$$

De même, $x \mapsto \partial_{xx}u(x,t)$ est C^1 donc somme de sa série de Fourier et les coefficients s'obtiennent en dérivant sous $\int$:

$$\forall t > 0 \quad \partial_{xx}u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -4\pi n^2 c_n(t)\exp(2i\pi nx)$$

Pour la dérivée selon t, on a de même que

$$\partial_t u(x,t) = \sum_n \tilde{c_n}(t)\exp(2i\pi nx)$$

Or : $c_n : t \in]0,\infty[\mapsto \int_0^1 u(x,t)\exp(2i\pi nx)dx$ est C^1 (majoration easy, on intègre fonction continue sur un compact), donc

$$\forall t > 0 \quad \tilde{c_n}(t) = c_n'(t)$$

On arrive donc à :

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t) - 4\pi n^2 c_n(t))\exp(2i\pi nx)$$

Le terme de gauche est une fonction continue et le terme de droite est une série de Fourier convergeant uniformément donc est continu. Donc par unicité de dev en série de Fourier de la fonction nulle, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad 0 = c_n'(t) - 4\pi n^2 c_n(t)$$

Donc $c_n(t) = \alpha_n \exp(-4\pi n^2 t) \quad t > 0$.

Déterminons les coefficients α_n. f est C^1 donc somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\exp(2i\pi nx)$$

Appliquons Parseval à $f(.) - u(t,.)$, pour t fixé :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f) - c_n(t)|^2 = \int_0^1 |f(x) - u(x,t)|^2 dt$$

Donc à n fixé :

$$|c_n(f) - c_n(t)|^2 \leq \int_0^1 |f(x) - u(x,t)|^2 dt$$

Faisons tendre t vers 0 : le membre de droite tend vers $|c_n(f) - \alpha_n|^2$, celui de gauche par convergence dominée (majoration par la borne sup de la fonction intégrée qui est continue sur un compact) vers 0.

Donc $\alpha_n = c_n(f)$

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi nx} && (1)\\
= & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(y) e^{2i\pi ny} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi nx} && (2)\\
= & \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t} f(y)dy && (3)\\
= & \int_0^1 K(x-y,t) f(y)dy && (4)
\end{aligned}
$$

où l'on a posé pour $t > 0$ $K(x-y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t}$, qui converge normalement (donc l'interversion de la dernière ligne est justifiée)

Synthèse Posons $u(x,t) = \int_0^1 K(x-y,t) f(y)dy$ et vérifions que u est solution de (C).

a) u est bien définie

A x fixé, la série

$$K(x-y,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t}$$

est convergente si $t > 0$ et continue de période 1 (vu comme fonction de y), donc $\int_0^1 K(x-y,t) f(y)dy$ est bien défini.

b) u bien régulière et solution de l'équation On remarque que $\forall k \geq 0$ la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t}$$

est normalement convergente pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times K$ où K est un compact dans $]0,\infty[$. On peut donc dériver K(x-y,t) en t et en x en dérivant sous le signe $\sum$ autant de fois que l'on veut, et l'on obtient des fonctions continues en y, on peut donc ensuite dériver u sous le signe $\int$ (majoration par le max car on intègre fonction continue sur un compact).

c) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$u(x,t) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nx} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1)$$

Comme f est $\mathcal{C}^2$, $c_n(f) = 0(1/n^2)$ donc la série ci-dessus est normalement convergente sur $[0,\infty[$, donc on peut écrire :

$$\lim_{t\to 0} (u(x,t) - f(x)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nx} \lim_{t\to 0} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1) = 0$$

Unicité Soit u_1 et u_2 solution de (C). Comme l'équation de la chaleur est linéaire, alors $u = u_1 - u_2$ est solution de

$$(E_0) \begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}\ \forall t > 0 \\ \lim_{t\to 0} u(x,t) = u(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Posons pour $t \in [0, \infty[$:

$$E(t) = \begin{cases} \int_0^1 (u(x,t))^2 dx & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

E est continue en 0, dérivable sur $]0, \infty[$ et on a :

$$E'(t) = \int_0^1 2u(x,t)\partial_t u(x,t)dx = \int_0^1 2u(x,t)\partial^2_{xx} u(x,t)dx$$

Par IPP, en se souvenant que u(0,t)=u(1,t), on obtient :

$$E'(t) = -2\int_0^1 (\partial_x u(x,t))^2 dx$$

Donc E est continue, positive décroissante sur $[0, \infty[$, comme E(0)=0, on en déduis E est identiquement nulle, donc u aussi. □

0.3 Compléments sur les théorèmes d'inversions séries, intégrales, limites

Théorème 0.2. *Théorème de convergence uniforme Si f périodique (période 1) telle que $\sum |c_n(f)|$ converge. Alors la série de Fourier de f est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et f est presque partut égale à sa somme de sa série de Fourier.*

(Si f est en plus continue, alors elle est égale partout à sa série de Fourier)

Conséquence : Si f périodique est C^1 alors la série de Fourier de f est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et

$$f(x) = \sum_n c_n(f)e^{2i\pi nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition 0.3.

$$f \in C^k \Rightarrow |c_n(f)| \leq \frac{Cte}{n^k}$$

Proposition 0.4. *Soit $k \geq 2$*

$$f \in C_{per} \text{ et } |c_n(f)| \leq \frac{Cte}{n^k} \Rightarrow f \in C^{k-2}$$

Proof. thm convergence uniforme :

$$f(x) = \sum_n c_n(f)e^{2i\pi nx}$$

La série dérivée de $\sum_n c_n(f)e^{2i\pi nx}$ est $\sum_n c_n(f)2i\pi n e^{2i\pi nx}$. Or :

$$|c_n(f)n| \leq \frac{Cte}{n^{k-1}}$$

Si $k \geq 3$ alors f continument dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\partial f = \sum c_n(f)2i\pi n e^{2i\pi nx}$$

Puis on recommence le raisonnement. □

0.4 Interversion $\sum$ et $\int$

Théorème 0.5. *(f_n) continue sur $[a,b]$. Si (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ alors :*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx$$

Théorème 0.6. *Si les f_n sont dérivables sur $[a,b]$ et si :*
a) $f_n \to f$ simplement sur $[a,b]$
b) $f_n' \to g$ uniformément sur $[a,b]$
alors f est dérivable sur $[a,b]$ et f'=g.

Théorème 0.7. *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b \sum_n u_n(x)dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx$$

0.5 Théorèmes de permutation de Lebesgue

Théorème 0.8. *(f_n) suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement vers f continue telle que :*

$$\exists g \text{ intégrable telle que } \forall n \ |f_n| \leq g$$

Aors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f dx = \lim_n \int_I f_n dx$$

Théorème 0.9. *Soit $\sum_n u_n$ série de fonctions intégrables sur I dont la somme est une fonction continue sur I. Si l'on a une des deux conditions suivante :*
- la série de fonction $\sum_n |u_n|$ converge sur I et sa somme est continue intégrable sur I
- la série $\sum_n \int_I |u_n(x)|dx$ est convergente
Alors la fonction $\sum_n u_n$ est intégrable sur I, la série des intégrales $\sum_n \int_I u_n dx$ est convergente et on a :

$$\int_I \sum_n u_n dx = \sum_n \int_I u_n dx$$

0.6 Théorème classique

Théorème 0.10. *V voisinage ouvert contenu dans U. Si $f : V \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue alors*

$$\phi(t) = \int_a^b f(t,x)dx$$

est continue.

Si la dérivée partielle de f *par rapport à* t *:*

$$\partial_t f : V \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$$

existe et est continue, alors ϕ *est dérivable sur* V *et :*

$$\phi'(t) = \int_a^b \partial_t f(t,x)dx$$