Cauchy-Lipschitz

Maximilien Dreveton

July 3, 2016

Références

0.1 Recasages

Passe à l'aise 205 Espaces complets. Exemples et applications

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

220 Équations différentielles X' = f(t,X). Exemples d"étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Arnaques 201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

0.2 Le développement

Théorème 0.1. *Soit (E,d) métrique complet et $F : E \to E$ une fonction telle que l'une de ses itérée soit contractante. Alors F vérifie le théorème du point fixe.*

Proof. F^n (itérée n ième de F) est contractante donc soit u^* son unique point fixe

Existence On a donc $F^n(F(u^*)) = F(u^*)$ donc F(u*) point fixe de F^n donc $F(u^*) = u^*$ par unicité du point fixe.

Unicité Soit u_1 et u_2 deux points fixes de F, donc ils sont aussi points fixes de F^n donc égaux.

□

Théorème 0.2. *Cauchy Lipschitz global*

$I = [a, b]$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *K lipschitzienne.*

Alors $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$ *le problème de Cauchy (*)* $u' = F(u)$ *et* $u(a) = u_0$ *admet une unique solution sur* $[a, b]$.

Proof. On réinterprète de problème en problème de point fixe pour une application judicieusement choisie, et on conclut par Picard.

Mise sous forme intégral

$$\iff u(t) = u_0 + \int_a^t F(u(s))ds \text{ et } uC^0 \tag{1}$$

$$\iff u = \mathcal{F}(u) \tag{2}$$

avec

$$\mathcal{F} : E \to R : u \mapsto u_0 + \int_a^t F(u(s))ds \tag{3}$$

avec $E = (C^0([a,b]), ||.||_\infty)$: c'est un Banach, donc un métrique complet.

Regardons si $mathcalF$ contractante

$$||(\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v))(t)|| = ||\int_a^t F(u(s)) - F(v(s))ds|| \tag{4}$$

$$\leq \int_a^t K||u(t) - u(s)||ds \tag{5}$$

$$\leq K \int_a^t ||u - v||_\infty ds \tag{6}$$

$$\leq K(t-a)||u - v \tag{7}$$

$$\infty \tag{8}$$

Donc $\mathcal{F}$ est (b-a)K lipshitzienne, mais (b-a)K n'a aucune raison d'être plus petit (strictement) que 1.

Itérées de $\mathcal{F}$

$$||(\mathcal{F}^2(u) - \mathcal{F}^2(v)(t)|| \leq \int_a^t K||\mathcal{F}(u(s)) - \mathcal{F}(v(s))||ds \tag{9}$$

$$\leq K \int_a^t K(s-a)||u - v||_\infty ds \tag{10}$$

$$\leq K^2 \frac{(t-a)^2}{2} ||u - v||_\infty \tag{11}$$

Par récurrence on montre que :

$$||(\mathcal{F}^2(u) - \mathcal{F}^2(v)|| \leq \frac{K^n (t-a)^n}{n!} ||u - b||_\infty \tag{12}$$

Donc à partir d'un certain n, F^n est contractante et le point fixe est l'unique solution au problème de Cauchy.

□

0.3 Compléments

Théorème 0.3. *Théorème de Picard (E,d) métrique complet et $f : X \to X$ contractante. Alors f admet un unique point fixe.*