Ensemble de Cantor

Maximilien Dreveton

July 3, 2016

Références Schwartz Topologie p.222
Garett Kurtzman p.110
Schwartz II p.50
Rouvière PGCD p.149

0.1 Recasages

Passe à l'aise 204 Connexité. Exemples et applications. (comme exemple d'espaces totalement discontinu)

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence un+1 = f(un). Exemples et applications.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Arnaques 201 Espaces de fonctions : exemples et applications. (on de parle de limite uniforme, de fonctions monotones)

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. (escalier du diable est défini comme la limite uniforme d'une suite de fonction)

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

0.2 Le développement version 1

On part de $P_0 = [0, 1]$. On coupe P_0 en 3 part égales, on vire celle du milieu.

$$P_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] =: J_{1,0} \cup J_{1,2}$$

On itère sur $J_{1,0}$ et $J_{1,2}$.

Formellement on a $P_n = f_1(P_n) \cup f_2(P_n)$ où $f_1(x) = \frac{x}{3}$ et $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$.

Pour les notations, on a

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$$

Où les $J_{n,k}$ sont 2^n intervalles de longueur $1/3^n$. Formellement, on peut les écrire de la forme :

$$J_{n,k} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \cdots + \frac{k_n}{3^n}, \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \cdots + \frac{k_n}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right]$$

où $k = (k_1, \ldots, k_n)$ où les k_i sont dans $\{0, 2\}$.

Définition 1. *Ensemble de Cantor*

$$K := \bigcap_n P_n$$

Théorème 0.1. *K est compact, d'intérieur vide, sans point isolés, a la puissance du continu.*

$$x \in K \iff u_n(x) \in \{0, 2\} \text{ où } x = \sum \frac{u_n(x)}{3^k}$$

Autrement dit, le développement en base 3 ne comporte que des 0 ou 2.

Proof. (i) K est borné et fermé (intersection de fermé) donc compact.

(ii) Supposons K d'intérieur non vide, et soit x intérieur à K. Alors il existe un intervalle U contenant x et contenu dans K. Soit ϵ la longueur de cet intervalle.

Soit n tel que $1/3^n < \epsilon$. Alors P_n est la réunion d'un nombre fini d'intervalle disjoints de longueur $< \epsilon$. Donc U ne peut être inclu dans P_n.

(iii) Soit $x \in K$ et U ouvert contenant x. Alors $\exists \epsilon > 0 \ : \ I =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$.

On va montrer que $K - \{x\} \cap U \neq 0$.

Soit $n \geq 1$ tel que $1/3^n < \epsilon$. $x \in K \Rightarrow \exists k : x \in J_{n,k} = [a_n, b_n]$

Si $x = a_n$ alors $[a_n, b_n] \subset [x, x + \epsilon[$ donc $b_n \in I \cap K - \{x\}$.

Idem si $x = b_n$ on a $a_n \in I \cap K - \{x\}$.

Si $x \in]a_n, b_n[$ alors a_n et b_n sont dans $K - \{x\}$, or par construction les extrémités des intervalles $J_{n,k}$ sont dans K.

(iv)

Sens retour Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}$ avec $u_n \in \{0, 2\}$. Montrons que $x \in K$ cad $\forall n x \in P_n$.

Posons $x = x_n + r_n$ avec $x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p}{3^p}$ et $r_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{u_p}{3^p}$. On a :

$$0 \leq r_n \leq 1/3^n \tag{1}$$

Pour $k := (u_1, \ldots, u_n)$ on a x_n l'origine de $J_{n,k}$ et $x_n + 1/3^n$ en est l'extrémité.

Donc $x \in J_{n,k} \subset K$

Réciproquement soit $x \in K$.

Si x est une des extrémités de l'un des $J_{n,k}$, alors $u_n(x) \in \{0, 2\}$.

Si x n'est pas une extrémité, alors montrons par l'absure qu'il ne peut être de la forme $\frac{a}{3^p}$ (a premier avec 3). En effet, on aurait dans ce cas $x \in J_{n,k}$ pour un certain k, donc $x = \frac{\alpha}{3^m} + r, \quad 0 < r < \frac{1}{3^m}$. Donc $0 < |\alpha - a| < 1$: impossible car a et α sont entiers.

Donc x admet un développement en base 3 infini.

$$\forall n \ x \in P_n \Rightarrow \exists k = (k_1, \dots, k_n) \in \{0,2\}^n \ : \ x = \sum_{k=1}^{n} \frac{k_p}{3^n} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{u_p}{3^p}$$

L'unicité du développement en base 3 donne $k = (u_1, \dots, u_n)$ donc $u_p \in \{0,2\}$ pour $p \leq n$.

(v) $\phi : K \to \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} x \mapsto (u_n(x))_n$ est une bijection (continue), donc K a la puissance du continu.

$\square$

Proposition 0.2. *K est totalement discontinu (ses composantes connexes sont réduites à un point).*

Proof. x,y dans K, montrons qu'il existe A,B ouverts fermés tels que K soit l'union disjointe de A et B, avec A contenant x et B contenant y.

Par exemple, supposons $x < y$ et a_i et b_i les termes du développement en base 3 de x et y. Soit $i_0 = \max\{i : a_i = b_i\} + 1$

$$z := \sum_{i=1}^{i_0} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

On a $z \in [0,1] - K$ et $x < z < y$;

Alors $A := K \cap [0, z]$ et $B = K \cap ^[z, 1]$ conviennent. $\square$

0.3 Version 2

Proposition 0.3.

$$\lambda(K) = 0$$

Proof. $\lambda(P_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\square$

Théorème 0.4. *La probabilité associée à K n'est pas à densité alors que sa fonction de répartition est presque partout dérivable (et de dérivée nulle).*

Autrement dit, il existe une fonction f croissante sur $[0,1]$*, vérifiant f(1)=1, f(0)=0, de dérivée presque partout nulle.*

Proof. Introduisons

$$F_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x 1_{K_n}(t) d\lambda(t)$$

Les F_n sont des fonctions de répartitions continues (on a bien $F_n(1)$=1 et $F_n(0)$=0). Montrons qu'elles convergent uniformément vers une fonction F.

Montrons que $(F_n(x))_n$ est de Cauchy. Soit $x \in [0,1]$, on majore $|F_{n+1}(x) - F_n(x)|$.

$$x \in \overline{P_n^c} \Rightarrow \forall k \geq n \quad F_k(x) = F_n(x)$$

Sinon on a x dans P_n ......

Dans tous les cas :

$$|f_{n+m}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-2}} \tag{2}$$

Donc $(f_n(x))_n$ est de Cauchy et converge uniformément vers F(x).

Propriétés de F F est continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

F est croissante.

F est constante par morceaux sur K^c : en effet, on a vu que si x n'est pas dans K, alors $F_n(x) = F_{n+m}(x)$ à partir d'un certain rang n. Par passage à la limite on a bien $F(x) = F_n(x)$.

Donc F est dérivable presque partout (ie sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor), de dérivée nulle. Pourtant F(1)-F(0)=1.

Par l'absurde, si la proba associée à F est à densité, alors on aurait $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt = 0$, or F(1)=1. □

0.4 Version 3 : via itérations de suites

Ref : Rouvière

Proposition 0.5. *Soit $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ C^2, I intervalle, et on considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 dans I.*

Soit a un point fixe de f dans I. Alors on distingue les cas suivants :

(i) $|f'(a) < 1|$: a est dit attractif

$$u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$$

(ii) $|f'(a)| = 0$: a est superattractif.

$$u_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(u_n - a)^2$$

(iii) $|f'(a)| > 1$: a est répulsif. Il existe un intervalle J fermé centré en a tel que pour $x_0 \in J$, (x_n) sorte de J.

Proof. (iii) Soit k tel que $|f'(a)| > k > 1$ et $h > 0$ tel que $J = [a - h, a + h] \subset I$ et $f'(x) \geq k$ $\forall x \in J$.

Alors pour $u_0 \in J$ le théorème des accroissements finis donne :

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| = |f''(y_n)(u_n - a)| \geq k|u_n - a| \tag{3}$$

Si tous les u_n étaient dans J, on aurait $h \geq |u_n - a| \geq k^n|u_0 - a|$ $\forall n$ ce qui est impossible. Donc la suite $(u_n)_n$ sort de J. □

Proposition 0.6. *On considère la suite itérée $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$ avec*

$$f(x) = 3x1_{x\leq 1/2} + 3(1-x)1_{x>1/2}$$

(fonction tente).

L'ensemble K des points de départs a tels que (u_n) soit bornée est l'ensemble de Cantor

Proof. 3 étapes

u_n converge vers un point fixe de f ssi elle est constante à partir d'un certain rang. En effet, les points fixes de f sont 0 et 3/4, et sont répulsifs (calcul immédiat de la dérivée).

Montrons

$$(u_n)_n \text{ bornée} \iff \text{elle reste dans } [0,1]$$

Tout d'abord, s'il existe p tel que $u_p < 0$ alors $\forall n \geq p\ u_n < 0$ (récurrence immédiate : $u_n = 3^{n-p}u_p$).

S'il existe q tel que $u_q > 1$ alors $u_{q+1} = 3(1-u_q) < 0$ et on est ramené au cas précédent.

Donc

$$u_n \text{ bornée} \iff 0 \leq u_n \leq 1\ \forall n$$

Conclusion

$$C := \{a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : F^n(a) \in [0,1]\} \tag{4}$$

$$= C_0 \cap C_1 \cap \cdots \cap C_n \cap \ldots \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

où $C_0 = [0,1]$ et $C_{n+1} = F^{-1}(C_n)$ (image réciproque successives de $[0,1]$ par F).

On a

$$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$$

$$C_2 = ...$$

etc On retrouve bien l'ensemble de Cantor. $\square$