Calcul de TF via résidus

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Amar p.248
Candelpergher (Calcul Intégral) p.131 pour les exemples.

0.1 Recasages

Passe à l'aise 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

0.2 Développement (présenté à l'oral le jour J)

Théorème 0.1. *$f \in L^1(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-2i\pi xt)dt$*
Hypothèses : f se prolonge à $\{x \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$ en une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et tel que $\lim_{|z|\to\infty} f = 0$.
Alors pour $x < 0$ on a :

$$\mathcal{F}(f)(x) = 2i\pi \sum_{a \in A_f^+} Res(z \mapsto f(z)e^{-2i\pi zx}, a)$$

Où A_f^+ est l'ensemble (fini) des pôles de f sur le demi plan supérieur.

Proof. On applique le théorème des résidus à $z \mapsto f(z)e^{-2i\pi zx}$ sur le contour : droite de -R à R et demi cercle.
On suppose que f n'admet pas de pôle sur l'axe réel (sinon on les évite, comme f est L^1 ça va marcher, mais c'est plus lourd à rédiger).
Pour R assez grand, ce contour entoure tous les résidus de f. Donc :

$$\int_\gamma f(z)e^{-2i\pi zx}dz = 2i\pi \sum_{a\in A_f^+} Res(z\mapsto f(z)e^{-2i\pi zx}, a) \tag{1}$$

$$= \int_{-R}^{R} f(t)e^{-2i\pi tx}dt + \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-2i\pi xRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

On montre que la deuxième intégrale tend vers 0 quand R tend vers l'infini.

$$|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-2i\pi xRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta| \leq M_f(R)\int_0^\pi Re^{2\pi xRsin\theta}d\theta \tag{4}$$

où $M_f(R) = \sup\{|g(z)|, |z| = R \quad Im(z) \geq 0\} \to 0$ quand R tend vers l'infini (par hypothèse).

$$\int_0^\pi Re^{2\pi xRsin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} Re^{2\pi xRsin\theta}d\theta \tag{5}$$

$$\leq 2\int_0^{\pi/2} Re^{2\pi xR\frac{2}{\pi}\theta}d\theta \tag{6}$$

$$\leq 2R\frac{1}{4xR}(e^{2\pi xR\frac{2}{\pi}\theta} - 1) \tag{7}$$

$$\leq \frac{1}{2x}2 \tag{8}$$

$$\leq \frac{1}{x} \tag{9}$$

D'où le résultat □

On propose une application :

Proposition 0.2.

$$\forall t \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}\frac{1}{1+x^2}dx = \pi e^{-2\pi|t|}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}\frac{x}{1+x^2}dx = -i\pi sgn(t)e^{-2\pi|t|}$$

Proof. On applique le résultat précédent pour $x < 0$ puis on conclut par parité/imparité. Le seul résidu à calculer est en i.

Pour la deuxième intégrale, on remarque que la fonction considérée n'est pas dans L^1, mais l'intégrale est bien définie. Dans le thm, on n'a pas utilisé l'hypothèse L^1, juste que la TF avait un sens.

Pout $t < 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} \frac{1}{1+x^2} dx = 2i\pi \ Res\Big(z \mapsto e^{-2i\pi tz} \frac{1}{1+z^2}, i\Big) \tag{10}$$

$$= 2i\pi \ ev\Big(z \mapsto e^{-2i\pi tz} \frac{(z-i)}{1+z^2}, i\Big) \tag{11}$$

$$= \pi e^{2\pi t} \tag{12}$$

Idem pour l'autre intégrale. □

0.3 (Seule) question du jury

Comment calculer la deuxième intégrale à partir de la première via les distribution ? (en gros on dérive $\frac{1}{1+x^2}$ au sens des distributions)