Lemme de Borel

Maximilien Dreveton

July 1, 2016

Références Rouvière, Willem (Analyse Harmonique Réelle)

0.1 Recasages

Passe à l'aise 207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications. (on utilise le prolongement C^∞ dans le corolaire. Pas le meilleur développement pour cette leçon mais ça passe)

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Arnaques 240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications. (insister sur construction des fonctions plateau/partitions de l'unité via la convolution)

0.2 Le théorème

Théorème 0.1.

$$A : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\mathbb{N}; u \mapsto (u^{(n)}(0))$$

est surjective.

Autrement dit, les dérivées d'une fonction indéfiniment dérivables n'obéissent à aucune restriction.

Proof. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

Heuristique Si $RCV(\sum a_n x^n) = \infty$ alors le théorème est prouvé (et l'intérêt limité).

Si $RCV(\sum a_n x^n) = R > 0$ alors soit f(x) fonction plateau valant 0 en dehors de $]-R, R[$ et 1 autour de 0.

$$u(x) := \sum_n \big(a_n x^n f(x)\big)$$

Alors u convient.

Cas général $\quad RCV(\sum a_n x^n) = 0$

Soit f une fonction plateau valant 1 sur $]-1/2, 1/2[$ et 0 en dehors de $]-1, 1[$.

Posons

$$f_k(x) = a_k x^k f(\lambda_k x)$$
$$u(x) = \sum_k f_k(x)$$

Le but est de déterminer les λ_k telle que la série des dérivées $\sum f_k^{(m)}$ converge normalement sur tout compact pour tout m. On aura alors bien uC^∞ et $u^{(m)}(0) = a_m$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, et $k \geq m$. On a :

$$f_k^{(m)}(x) = a_k \sum_{p=0}^{m} C_m^p \; f^{(m-p)}(\lambda_k x) \; \lambda_k^{m-p} \; \frac{x^{k-p}}{(k-p)!}$$

Pour majorer, on remarque que f est nulle en dehors de $[-1, 1]$, donc on majore pour $|\lambda_k x| < 1$

$$|f_k^{(m)}(x) \leq M_m |a_k| \sum_{p=0}^{m} C_m^p \; \lambda_k^{m-p} \frac{\lambda_k^{p-k}}{(k-p)!} \tag{1}$$
$$\leq \frac{2^m M_m |a_k|}{(k-m)! \lambda_k^{k-m}} \tag{2}$$

Cette inégalité est valable pour $k \geq m \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

Prenons $\lambda_k := max(1, |a_k|)$, alors $\lambda_k^{k-m} \geq \lambda_k \geq |a_k|$ pour $k - m \geq 1$ d'où :

$$|f_k^{(m)}(x)| \leq \frac{2^m M_m}{(k-m)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad k \geq m+1 \tag{3}$$

Donc

$$\sum_k f_k^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} f_k^{(m)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k^{(m)}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (la première somme est finie et ne pose pas de problèmes).

Donc $u = \sum_k f_k$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées se calculent en dérivant terme à terme. En particulier $u^{(m)}(0) = \sum f_k^{(m)}(0) = a_m$ $\square$

Corollaire 0.2. *$f \in C^\infty([a, b])$, alors f peut être prolongée en une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Proof. On prolonge de manière C^∞ à gauche en a et à droite en b, par le théorème précédent. $\square$

Corollaire 0.3. *$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire. Alors $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)$*

Proof. Astucieuse, voir Rouvière. Probablement trop long pour rentrer dans le développement. $\square$

0.3 Compléments : Construction de fonctions plateau

Lemme 0.4. *(i)* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto e^{-1/t} 1_{\mathbb{R}_+^*}$ *est* C^∞.

(ii) $\alpha(t) := \psi(t)\psi(1-t)$ *est* C^∞ *à support dans* $[-1, 1]$.

(iii) $\beta = \frac{\int_0^t \alpha(s)ds}{\int_0^1 \alpha(s)ds}$ *est* C^∞, *vaut 0 sur* $\mathbb{R}_-$, *1 sur* $[1, \infty[$

(iv) $f(x) := \beta(\frac{x-a}{b-a})\beta(\frac{d-x}{d-c})$ *est* $C^\infty(\mathbb{R})$, *à support dans* $[a, b]$ *et vaut 1 sur* $[b, c]$.

Proof. Quasi immédiat à l'aide de schémas. □