Structure des groupes abéliens finis

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Colmez (pour l'existence); Combes ou Ulmer (pour la partie unicité)

0.1 Recasages

Passe à l'aise 102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Caractère d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications. (dans ce cas, parler de dual d'un groupe dans la leçon)

Arnaques 109 Représentations de groupes finis de petit cardinal. (rien de spécial aux groupes de petit cardinaux; mais on peut l'appliquer sur des exeples simples)

0.2 Le développement

0.3 Compléments

Proposition 0.1. *Soit G un groupe abélien fini. Alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.*

Proof. G abélien donc les classes de conjugaison sont réduit à un élément : il y en a $|G|$.

Or $|Irr(G)| = |Conj(G)|$ et $\sum_{W \in Irr(G)} (dimW)^2 = |G|$ avec dim W≥ 1.

Donc dim W$= 1$ pour tout W$\in Irr(G)$. □

Proposition 0.2. *G abélien. Toute fonction de G dans C est combinaison linéaire de caractères linéaires.*

Proof. De manière générale, toute fonction centrale (donc ici toute fonction car G abélien) est combinaison linéaire de caractères irréductibles. □

Définition 1. *Les caractères linéaires forment une base orthonormée des fonctions de G dans $\mathbb{C}$.*

On a la TF de ϕ :

$$\tilde{\phi}(\chi) =< \chi, \phi >= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\phi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^{-1}\phi(g)$$

Exemple : appliqué à δ_a on trouve $\hat{\delta_a}(\chi) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi(a)}$ donc $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^{-1}\phi(g)$

Définition 2. *groupe dual $\hat{G}$ muni de la loi multiplication des caractères : $\chi_1\chi_2(x) := \chi_1(x)\chi_2(x)$*

Proposition 0.3. *G abélien fini. Alors $i : x \in G \mapsto (i(x))(\chi) \in \hat{\hat{G}}$ est un isomorphisme de groupe.*

Proof. Morphisme : $(i(xy))(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = (i(x))(\chi)(i(y))(\chi) \quad \forall\chi \in \hat{G}$.

On a $|Irr(G)| = |Conj(G)| = |G|$ et $|Irr(G)| = |\hat{G}|$, donc $|G| = |\hat{G}|$. De même $|\hat{G}| = |\hat{\hat{G}}|$, donc $|G| = |\hat{\hat{G}}|$, et il suffit de montrer que i est injectif.

La TF de δ_a montre que si $\chi(a) = \chi(b) \quad \forall\chi \in \hat{G}$, alors $\delta_a = \delta_b \Rightarrow a = b$. □

Lemme 0.4. *G abélien fini. (i) $x \in G$ d'ordre a, y d'ordre b, avec pgcd(a,b)=1 alors xy est d'ordre ab.*

(ii) $a, b \in \mathbb{N}^*$, et si G contient des éléments d'ordre a et d'ordre b, il en contient d'ordre ppcm(a,b).

(iii) En particulier, l'exposant est défini comme le ppcm des ordres des éléments de G. Il est atteint (dans un groupe abélien !!).

Proof. □

Remarque : S_3 d'ordre/exposant 6 mais n'a pas d'éléments d'ordre 6.

Lemme 0.5. *G abélien fini. Alors G et $\hat{G}$ ont même exposant.*

Proof. On note N(G) l'exposant de G. $\chi \in \hat{G}$, on a

$$\chi(x)^{N(G)} = \chi(x^{N(G)}) = \chi(1) = 1 \quad \forall x \in G$$

Donc

$$\chi^{N(G)} = 1 \Rightarrow N(\hat{G})|N(G)$$

De même $N(\hat{G})|N(\hat{\hat{G}})$. Or G est isomorphe à son bidual, donc a le même exposant. Donc $N(G) = N(\hat{G})$. □

Théorème 0.6. *Théorème de structure des groupes abéliens finis.*

Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe une suite d'entier strictement positifs $N_1, \dots N_r$ où N_1 est l'exposant de G et $N_{i+1}|N_i$ telle que :

$$G \approx \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}$$

Proof. Récurrence sur $|G|$.

Initialisation Ok si $|G| = 1$.

Hérédité Soit G d'ordre plus grand que 1, posons N_1 son exposant.

On a $\forall x \in G \forall \chi \in \hat{G} \quad \chi(x)^N = 1$ donc $\chi(x)$ est racine Nième de l'unité.

Comme N est aussi l'exposant de $\hat{G}$, et $\hat{G}$ est abélien, il existe un $\chi_1 \in \hat{G}$ d'ordre N. De plus, $\chi_1(G)$ est un sous groupe du groupe cyclique μ_N des racines N-ième de l'unité. Et χ_1 d'ordre N implique que $\chi_1(G) = \mu_N$. Donc il existe $x_1 \in G$ tel que $\chi_1(x_1) = \exp(i\frac{2\pi}{N})$. L'ordre de x_1 divisant celui de N (par définition de l'exposant), on a x_1 d'ordre N.

Donc le groupe H_1 engendré par x_1 est cyclique, d'ordre N, ie isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Fin de la récurence Montrons que $G = H_1 \times G_1$ où $G_1 = Ker\chi_1$. On conclura ensuite par l'HR à G_1, car l'exposant de G_1 divise celui de G donc de H_1.

On a $\tilde{\chi_1} : H_1 \to \mu_n$ isomorphisme car surjectif (sinon son ordre serait un diviseur strict de N) et égalité des cardinaux. Notons α son inverse.

Soit $x \in G$, posons : $a := \alpha(\tilde{\chi_1}(x))$ et $b := a^{-1}x$. Alors ab=x, avec $a \in H_1$ et $b \in G_1$ (En effet, $\chi_1(b) = 1$).

Enfin, soit $x \in H_1 \cap G_1$. On a x=1 car χ_1 est injectif sur H_1. □

0.4 Autre présentation du début

Suivre Peyré (Algèbre de la transformée de Fourier discrète). On reste cantonné au cas particulier des groupes abéliens pour montrer les propriétés du début.