Equation de Pell Fermat : points à coordonées entières sur une hyperbole

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Référence : CAPES interne 1991 + maison

0.1 Recasages

Passe à l'aise 126 Exemples d'équations diophantiennes.
180 Coniques. Applications.

0.2 Le développement

0.2.1 Définition d'une loi de groupe sur une hyperbole

On considère l'équation (P) $x^2 - dy^2 = 1$ où d n'est pas un carré parfait, et on cherche les solutions entières de P.

Clairement, le point $M_0 = (1, 0)$ est une solution particulière de l'équation.

P définit une hyperbole H, dans le repère orthonormé R=(O,i,j). Les asymptotes sont $\Delta_1 = x + \sqrt{(d)}y$ et $\Delta_2 = x - \sqrt{(d)}y$

Dans le repère R'=(O,u,v) où $u = i + \sqrt{d}y$ et $v = i - \sqrt{y}$ l'équation de H devient XY=1.

Enfin, dans R', le point M_0 a pour coordonées (1,0).

On va dans la suite jouer entre les deux repères. Dans R', on définit sur H une relation de groupe.

Définition 1. *Soient $A, B \in H$. Alors A*B est le point d'intersection de H avec la droite parallèle à AB passant par M_0. Si A=B, on prend la parallèle à la tangente en A à l'hyperbole.*

Proposition 0.1. *(i) (H,*) est un groupe abélien*
(ii) Posons $\phi : H- > R^*, (x, 1/x)- > x$; ϕ un isomorphisme.
(iii) Enfin, $\phi(A * B) = \phi(A)\phi(B)$

Proof. (i) Par construction, * est bien une loi de composition interne. Le caractère abélien est direct. On peut se convaincre de l'existence d'un inverse via un dessin. L'associativité n'est pas à priori triviale, mais découle directement avec (iii).

(ii) Trivial (dessin)

(iii) Soient A$(X_A, 1/X_A)$ et B$(X_B, 1/X_B)$ deux points de H (coord dans R'). Alors la droite passant par $M_0(1,1)$ parallèle à AB a pour équation :

$$Y - 1 = (X-1)\frac{X_B - X_A}{1/X_B - 1/X_A}$$

Le point A*B est sur H par définition, donc a pour coord (X,1/X) et l'équation à résoudre devient :

$$\frac{1}{X} = (X-1)\frac{-1}{X_A X_B} + 1$$

ce qui se simplifie en :

$$(X - X_A X_B)(X-1) = 0$$

Donc X=$X_A X_B$ (car $X = 1$ implique A*B=M_0), donc (iii).

Pour l'associativité, on a direct $\phi((A * B) * C) = \phi(A)\phi(B)\phi(C)$ donc on parenthèse comme on veut. $\square$

Revenons maintenant au problème initial.

Proposition 0.2. *Soient A et B deux points de H à coordonées entières dans H (cad solution de Pell Fermat). Alors M*N est aussi solution de Pell Fermat.*

Proof. Il faut calculer les coordonées de M*N dans la base R (on les a dans R'!). Pénible mais faisable.

On introduit les matrices de passage de R à R'.

$$P = Pass(R, R') = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{d} \\ 1 & -\sqrt{d} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = Pass(R', R) = \frac{1}{-2\sqrt{d}}\begin{pmatrix} -\sqrt{d} & -\sqrt{d} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} (M * N)_R &= P^{-1}(M * N)_{R'} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} (x_M - \sqrt{d}y_M)(x_N - \sqrt{d}y_N) \\ \\ (x_M + \sqrt{d}y_M)(x_N + \sqrt{d}y_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_M x_N + d y_N y_M \\ \\ x_M y_N + x_N y_M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Ce lemme montre qu'à partir d'une solution autre que M_0, on peut construire d'autre solutions. la question est de savoir si on peut toutes les construire comme ça.

On se donne M_1 une solution (autre que M_0), que l'on va supposée minimale, cad la solution d'abscisse minimale (autre que M_0).

On pose par récurrence $M_{n+1} = M_n * M_1$.

Proposition 0.3. *Soit X_n l'abscisse de M_n. Alors $X_n = X_1^n$.*

Proof. Récurrence immédiate. $\square$

Proposition 0.4. $M \in [M_n, M_{n+1}] \iff \phi(M) \in [M_{n+1}, M_{n+2}]$

Proof. On note M(X,1/X) et $\phi(M) = (X', 1/X')$ avec $X' = XX_1$. Enfin, on remarque que X_1 est strictement positif.

$$\begin{aligned} M \in [M_n, M_{n+1}] &\iff X_n \leq X \leq X_{n+1} \\ &\iff X_n X_1 \leq X X_1 \leq X_{n+1} X_1 \\ &\iff X_{n+1} \leq X' \leq X_{n+2} \\ &\iff \phi(M) \in [M_{n+1}, M_{n+2}] \end{aligned}$$

□

Proposition 0.5. *M_1 étant minimale par hypothèse, cad il n'existe pas d'autre solution dans $[M_0, M_1]$, alors les solutions de Pell Fermat sont exactement les M_n.*

Proof. Récurrence immédiate. L'initialisation vient par choix (minimalité) de M_1, et la récurrence de la proposition précédente. □

Conclusion Les solutions de Pell Fermat sont exactement les couples :

$$x_n + \sqrt{d} y_n = (x_1 + \sqrt{d} y_1)^n$$

avec en plus :

$$x_{n+2} = x_{n+1} x_1 + d y_{n+1} y_1$$

$$y_{n+2} = x_{n+1} y_1 + y_{n+1} x_1$$

0.3 Compléments

On peut trouver les solutions de Pell Fermat via développement en fractions continues. Dans ce cas, on n'a pas besoin de trouver une solution évidente au départ.