Cardinal cône nilpotent

Maximilien Dreveton

July 8, 2016

Références H2G2

0.1 Recasages

Passe à l'aise 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications

123 Corps finis. Applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

153 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements.

0.2 Le développement

Lemme 0.1. *Lemme de Fitting*

E espace de dimension finie, $u \in End(E)$, alors la suite $(dimKeru^i)_i$ est croissante et stationnaire en s'essoufflant.

De plus, $\exists n_0 : E = Keru^{n_0} \oplus Imu^{n_0}$.

En particulier, $u_{Keru^{n_0}}$ est nilpotente, et $u_{Imu^{n_0}}$ est inversible.

Proof. $keru^k \subset keru^{k+1}$

Supposons $\exists n_0 : Keru^{n_0} = Keru^{n_0+1}$, montrons qu'alors $Keru^{n_0+1} = Keru^{n_0+2}$.

En effet, $x \in Keru^{n_0+2}$, alors $u(x) \in Keru^{n_0+1} = Keru^{n_0}$, donc $x \in Keru^{n_0+1}$.

L'inclusion inverse est directe.

En fait un tel n_0 existe toujours car $dim(Keru^k)_k$ est croissante, bornée par dim E.

Enfin, montrons que $Keru^{n_0}$ et Imu^{n_0} sont en somme directe. Leur dimension vaut dimE par le théorème du rang. Soit x dans l'intersection, montrons que x est nul.

On a $x \in Imu^{n_0}$ donc $x = u^{n_0}(y)$, mais $x \in Keru^{n_0}$ donc $u^{n_0}(x) = 0 = u^{2n_0}(y)$. Donc $y \in Keru^{2n_0} = Keru^{n_0}$ car la suite s'essoufle à partir de n_0. Donc $u^{n_0}(y) = 0 = x$. □

Proposition 0.2.

$$n_d := |\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{F}_q) nilpotente\}| = q^{d(d-1)}$$

Proof. Introduisons les notations suivantes :

n,k entiers tels que n+k=d.

$$X_{n,k} = \{(F,G)\text{sev de } \mathbb{F}_q^d \quad F \oplus G = \mathbb{F}_q^d \quad \dim F = n \ \ \dim G = k\}$$

$$m_{n,k} = |X_{n,k}|$$

Enfin, notons $g_d = |GL_d(\mathbb{F}_q)$.

1ère étape Montrons que $m_{n,k} = \frac{g_d}{g_k g_n}$

Soit $\rho : GL_d(\mathbb{F}_q) \times X_{n,k} \to X_{n,k}; (M, (F,G)) \mapsto (MF, MG)$ l'action de $GL_d(\mathbb{F}_q)$ sur $X_{n,k}$.

Alors la formule des classes donne : $m_{n,k} = \frac{GL_d(\mathbb{F}_q)}{|Stab(x)}$, pour $x \in X_{n,k}$.

Or

$$Stab(F,G) = \{\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, P \in GL_n(\mathbb{F}_q), Q \in GL_k(\mathbb{F}_q)\}$$

2ème étape Soit $u \in End(E)$. Par Fitting, il existe un couple (F,G) dans $X_{n,k}$ tel que u_F est nilpotente et u_G inversible.

Donc

$$\begin{aligned}
q^{d^2} \quad = |End(\mathbb{F}_q^d)| \quad &= \sum_{i=0}^{d} m_{i,d-i} n_i g_{d-i} &(1)\\
&= \sum_{i=0}^{d} n_i \frac{g_d}{g_i} &(2)\\
&= \frac{g_d}{g_{d-1}} \sum_{i=0}^{d-1} n_i \frac{g_{d-1}}{g_i} + n_d &(3)\\
&= \frac{g_d}{g_{d-1}} q^{(d-1)^2} + n_d &(4)
\end{aligned}$$

Or $g_d = (q^d-1)(q^d-q)\dots(q^d-q^{d-1}) = (q^d-1)(q^{d-1}-1)\dots(q^1-1)q^{d-1}$

donc $\frac{g_q}{g_{d-1}} = q(q^d-1)$

Ce qui permet de conclure.

□