Etude des composantes connexes de O(p,q)

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références H2G2 ou Denis Serre (Matrices)

0.1 Recasages

Passe à l'aise 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Arnaques 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices. (O(pq), est le stabilisateur de $I_{p,q}$ par l'action de congruence; théorème d'intertie de Sylvester : une matrice M est dans l'orbite de $I_{p,q}$ pour certain (p,q)= signature de M)

0.2 Le développement

Définition 1.

$$O(p,q) := \{PI_(p,q)^t P | P \in M_n(\mathbb{R})\}$$

0.2.1 Quelques lemmes et propriétés

Lemme 0.1. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme*

Proof. Admis par faute de temps. □

Lemme 0.2. *(décomposition polaire)*

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}) \exists (O,S) \in O(n) \times S_n(\mathbb{R})^{++} | M = OS$$

Lemme 0.3. *O(p,q) est stable pas passage à l'inverse et transposition*

Proof. OK mais à faire... □

0.2.2 Le théorème

Proposition 0.4. $O(p,q) \equiv O(p) \times O(q) \times R^{pq}$

Proof. Partir de la décomposition polaire de M=OS.

On montre qu'en fait $O \in O_n \cap O(p,q)$ et $S \in S_n \cap O(p,q)$, grâce à l'exponentielle matricielle. Puis on montre $O_n \cap O(p,q) \sim O(p) \times O(q)$ et $S_n \cap O(p,q) \sim R^{pq}$ (par des produits par blocs). □

0.3 Remarques

Étudier le cas O(1,1). O(3,1)= groupe de Lorentz, utile en relativité restreinte (et générale).

Savoir justifier l'homéomorphisme de l'exponentielle matricielle (au moins le caractère bijectif...)