Lie Kolchin

Maximilien Dreveton

July 29, 2016

Références Chambert Loir, Algèbre corporelle

0.1 Recasages

Passe à l'aise 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Arnaques 103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

0.2 Le développement

0.2.1 Motivations ; Trigonalisation simultanée

Définition 1. *On pose T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{C})$.*

On se donne un groupe de matrices complexes inversibles G, et cherche à savoir s'il existe une base dans laquelle les matrices de G sont toutes triangulaires supérieure. Si G est abélien, un résultat classique nous assure que oui (voir preuve plus bas). En revanche, si on prend G n'importe comment, ça ne va pas toujours être le cas (par exemple si G est $GL_n(\mathbb{C})$ tout entier....).

Proposition 0.1. *T est un sous groupe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Proof. On calcule les groupes dérivés successifs. En prenant le commutant de deux matrices de T, on tombe sur une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Ensuite, en prenant le commutant de telles matrices, on obtient une ligne de 0 sur la sur-diagonale. Et ainsi de suite, on fait apparaître une nouvelle ligne de zéros à chaque fois, jusqu'à obtenir l'identité □

Corollaire 0.2. *Tout sous groupe de T est résoluble.*

Donc si G n'est pas résoluble, alors G n'est pas conjugué à T, c-a-d il n'existe pas de base dans laquelle les éléments de T sont triangulaires. La question est de savoir si la réciproque est juste, cad tout sous groupe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à T. Le contre exemple suivant montre que c'est faux.

Posons

$$D_2 = \{D = diag(a, b), ab \neq 0\}$$

$$N_2 := \{PDP^{-1} | D \in D_2, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

Proposition 0.3. *Le normalisateur N_2 de l'action de conjuguaison sur les matrices diagonales de taille 2 inversibles est résoluble, mais n'est pas conjugué à T.*

Proof. Soit $H = \{diag(x, 1/X), X \neq 0\}$. Alors H distingué dans N_2 et N_2/H abélien. □

Ainsi, la réciproque est fausse. Le théorème de Lie-Kolchin rajoute l'hypothèse de connexité, violée par N_2.

Proposition 0.4. *N_2 possède deux composantes connexes : les matrices diagonales et antidiagonales (inversibles).*

0.2.2 Théorème de Lie-Kolchin

Théorème 0.5. *Soit G un sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G conjugué à T.*

Dans la preuve, nous utiliserons les deux lemmes suivants.

Lemme 0.6. *Soit H un sous groupe abélien de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors H est conjugué à T (ie trigonalisable dans une même base).*

!

Proof. Soit v une famille d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux.

Si v est une famille d'homothéthies, alors le résultat est direct (n'importe quelle base convienrt).

Si v n'est pas une famille d'homothéthies, soit $v_1 \in v$ qui n'est pas une homothéthie. On raisonne par récurence sur n.

n=1 : OK

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n-1. Montrons le rang n. Soit V un sous espace stable de v_1 et W un supplémentaire de V dans $\mathbb{C}^n$. Dans une base adaptée à la décomposition V+W, une matrice h de v s'écrit $h = \binom{h_1 \, *}{0 \; h_2}$. On applique l'HR à h_1 et h_2, et dispose de base dans laquelle h_1 (resp. h_2) est triangulaire. □

Lemme 0.7. *Soit H un groupe connexe. Alors le groupe dérivé de H est connexe.*

Proof. Notons $S_1 := \{h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} | h_1, h_2 \in H\}$ le groupe des commutateurs de H. Et pour tout m, introduisons $S_m := \{s_1 \dots s_m | s_i \in S_1\}$. Alors par continuité de $(h_1, h_2) \rightarrow_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$, S_2 est connexe, et donc les S_m sont tous connexes. Mais l'identité est dans tous les S_m, donc l'union des S_m est connexe. Or $D(g) = \bigcap S_m$ est connexe. □

Proof. Preuve du théorème.

Soit G un sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$.

Introduisons $\tilde{m} := inf(m|D^m(G) = I_n)$, qui a un sens car G résoluble.

Si $\tilde{m} = 21$, alors G est abélien et le premier lemme permet de conclure.

Supposons $\tilde{m} > 1$. Alors $H := D^{\tilde{m}-1}$ est abélien et distingué dans G. En vertu du premier lemme, il existe une base dans laquelle les éléments de H sont triangulaire. Posons $V := \{v \in \mathbb{C}^n |$v propre par tous les éléments de H$\}$. Alors V non vide car le premier vecteur de la base est dans V. Montrons que V est stable par G. Soient $v \in V$, $h \in H$, $g \in G$ $h(g(v)) = gg^{-1}hg(v) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ Car H distingué dans G, donc $g^{-1}hg \in H$ et donc v est propre pour cette matrice. Ainsi, g(v) est propre pour tout h dans H, donc est dans V : v est stable par V.

On a donc trouvé un sous espace stable par G, non nul. Deux cas de figure : G est $\mathbb{C}^n$ ou non.

Supposons dans un premier temps V=$\mathbb{C}^n$. Donc tout élément de H est diagonalisable, et H abélien, donc une variante du premier lemme assure l'existence d'une base dans laquelle tout élément de H est diagonale. Plaçons nous dans une telle base.

Soit $h \in H$, $\phi_h : g \in G \rightarrow ghg^{-1} \in H$. Alors $phi_h(G)$ est l'orbite par conjugaison de h, donc les matrices dans l'orbite ont les mêmes valeurs propres que h. De plus, elle sont dans H (car H distingué), donc diagonale (dans la base judicieusement choisie) : il n'y a donc qu'un nombre fini de matrices diagonales partageant les valeurs propres de h! Ainsi $\phi_h(G)$ est fini, il est de plus connexe : donc il est réduit à un singleton. $\phi_h(G) = \{\phi_h(I_n)\} = \{h\}$ donc hg=gh.
Cela étant vrai pour tout h, on en déduit que H est dans le centre de G.

–¿ Les éléments de H sont les homothéties. Or, $H \in Z(G) \in Z(GL_n\mathbb{C}^n) \in SL_n(\mathbb{C})$ Donc $h \in H$ est une homotéthie de rapport λ_h, où λ_h est une racine n-ième de l'unité. Donc H est un groupe fini, connexe : H estréstreint à $\{I_n\}$, ce qui contredit l'hypothèse de départ

Maintenant, supposons V n'est pas $\mathbb{C}^n$, et raisonnons par récurence forte sur n. On raisonne par récurrence forte sur n.

n=1 : rien à faire.

n : V est donc un sous espace de $\mathbb{C}^n$ non trivial (ie ni $\{0\}$ ni $\mathbb{C}^n$) stable par G Soit W un supplémentaire de V dans $\mathbb{C}^n$. Dans une base adaptée à la décomposition V,W, une matrice g de G s'écrit donc : $g = \binom{g_1 *}{0\ g_2}$. Or $\phi_1 : g \rightarrow g_1$ et $\phi_2 : g \rightarrow g_2$ sont continues, donc $\phi_1(G)$ et $\phi_2(G)$ sont connexes résolubles. Comme V non trivial, on applique l'hypothèse de récurrence à ces deux groupes et on obtient une base dans laquelle toute matrice de g est triangulaire.

Ceci achève la preuve du théorème.

□

0.3 Remarques

Savoir montrer l'existence d'un supplémentaire (th base incomplète).

Faire l'exemple N_2 au début permet d'introduire élégamment la problématique et de motiver le théorème, par contre tel quel ça ne rentrera jamais en 15min. Chambert-Loir mentionne des applications de Lie-Kolchin à des équations différentielles, mais me parait trop dur.