Ensemble image de l'exponentielle matricielle

Maximilien Dreveton

July 8, 2016

Références Szpirglas (dans la partie complément sur l'exponentielle matricielle)

0.1 Recasages

Passe à l'aise 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

204 Connexité. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn. Exemples et applications

0.2 Le développement

Théorème 0.1. *(Ensemble image de l'exponentielle : cas réel et complexe)*

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C}))$$
$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \text{ telles que } \exists B \in M_n(\mathbb{R}) : A = B^2\}$$

Pour la preuve, nous allons en fait démonter un résultat plus fort sur l'exponentielle complexe, qui nous permettra de conclure quand à l'exponentielle réelle et complexe.

Propriété de l'exponentielle complexe

Proposition 0.2. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.*

Première preuve par Dunford

A=D+N=D(I_n+$D^{-1}N$) car D inversible (puisque A l'est)
D diagonalisable, on peut donc l'écrire comme l'exponentielle d'une matrice polynôme en A (penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange).
$D = P\ diag(e^{\mu_i})\ P^{-1}$, poser $Q(\lambda_i) = exp(\mu_i)$
I_n+$D^{-1}N$ est unipotente, donc I_n+$D^{-1}N = \exp\left(\sum_1^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} (D^{-1}N)^k \right)$

Deuxième Preuve

Définition 1. *On appelle groupe topologique un triplet (G,.,T) tel que (G,+) soit un groupe et (G,T) soit un ensemble topologique. En particulier, les applications inverses ($g \to g^{-1}$) et translation ((g,h) $\to$ gh) sont continues.*

Lemme 0.3. *Soit G un groupe topologique, et soit H un sous groupe de G contenant un voisinage du neutre e. Alors H est ouvert et fermé dans G.*

Démonstration du lemme

Montrons H ouvert. On peut prendre V voisinage ouvert de e dans G, avec $V \in H$. Soit $h \in H$. On a aussi $h \in hV \in H \in G$, ainsi hV est un voisinage ouvert de h inclus dans H (par continuité du morphisme translation à gauche par h). Donc H est ouvert.
Montrons H est fermé. On a $H^c = \bigcup_{g \notin H} gV$; si $g \notin H, gV \in H^c$. Comme gV est ouvert, H^c est ouvert (en tant que réunion d'ouvert), et H est fermé.

Démonstration de la proposition

On considère $\mathbb{C}[A]$, algèbre commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$ engendré par A, isomorphe à $\mathbb{C}[A]/(\pi)$ avec π polynôme minimal de A.
1/ Pour $M \in \mathbb{C}[A]$, on a exp(M) $\in \mathbb{C}[A]$ (car fermé), et exp(M) est inversible
2/ On note U = $\mathbb{C}[A] \bigcap GL_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'ensemble des matrices de $\mathbb{C}[A]$ inversibles
Alors exp : $(\mathbb{C}[A], +) \to (U, .)$ est un morphisme
3/ Montrons que l'image de $\mathbb{C}[A]$ par exp est ouvert et fermé
La différentielle de exp en 0 est l'identité, qui est bien inversible. Par le théorème d'inversion locale, exp réalise un difféomorphisme entre un voisinage ouvert V_0 de 0 et un voisinage ouvert V_I de l'identité. Par le lemme précédent, exp($\mathbb{C}[A]$) est ouvert-fermé.
4/ Montrons U connexe : Soient M, N dans U. On construit un chemine γ tel que $\gamma M + (1-\gamma)N$ soit dans U. Clairement, un tel chemin est dans $\mathbb{C}[A]$, mais n'a aucune raison d'être inversible à priori.
Considérons $z \to det(zM + (1-z)N)$: c'est une application polynômiale en z, donc son ensemble de 0, noté K, est discret. Donc $\mathbb{C}$ K est connexe par arcs, et on dispose d'un chemin continu γ tel que $det(\gamma M + (1-\gamma)N)$ soit non nul, c'est à dire $\gamma M + (1-\gamma)N$ est inversible. Donc U est connexe.
Conclusion : exp($\mathbb{C}[A]$) est un ouvert-fermé non vide de U, et U est connexe. Donc exp($\mathbb{C}[A]$) = U

Remarque : En fait le lemme permet d'éviter de montrer que exp($\mathbb{C}[A]$) est ouvert-fermé, mais rajoute de la confusion à mon sens, donc à améliorer. A l'oral, introduire le morphisme plus clairement.
On peut montrer facilement que U est fermé : c'est le complémentaire de l'ensemble des zéros de la fonction continue dét : $\mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}$.

Démonstration du théorème La proposition précédente assure que $\exp((M_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$

Proposition 0.4. *Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice réelle M telle que A=exp(M) si et seulement si il existe une matrice réelle B telle que $B=A^2$.*

Preuve
Sens direct : prendre B=exp($\frac{M}{2}$)...
Sens retour : On peut voire B comme une matrice inversible complexe. Alors on dispose de P dans $\mathbb{C}[X]$ telle que B=exp(P(B)). La grosse subtilité est que P est complexe (et n'a aucune raison d'être réel), donc il faut être intelligent.
Néanmoins, comme B est réelle, elle est égale à sa conjuguée, et B=B*=exp(P*(B)).
En multipliant B par B* on obtient :
B^2 = exp((P+P*)(B)), et P+P* est un polynôme réel, donc (P+P*)(B) est une matrice réelle, notons la C. Donc A=exp(C), d'où le résultat.

0.3 Compléments

Corollaire 0.5. *Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que A=B^p.*

Preuve : A=exp(M); donc B=exp($\frac{M}{k}$) convient.

Corollaire 0.6. *GL_n($\mathbb{C}$) n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.*

Preuve On montre qu'il existe un voisinage V de I_n dans GL$_n$($\mathbb{C}$) tel que le seul sous-groupe contenu dans V soit $\{I_n\}$.
Par le théorème d'inversion locale, exp réalise un difféomorphisme de U (voisinage de 0) dans V. On note V'=exp(U), et U'=exp(U/2).
V' est ouvert. Soit M $\in$ V', on a M=exp(A) avec A dans U'. Il existe donc k $\mathbb{N}$ tel que ka $\in$ U $\setminus$ U'. On a : exp(kA)=M^k $\in$ V$\setminus$V', donc M^k $\notin$ V'.
Donc M^k sort de V', et il n'existe pas de sous groupe arbitrairement petit (autre que le singleton $\{I_n\}$).

0.4 Autre application : matrice totalement puissante sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$