Automorphismes de S_n

Maximilien Dreveton

July 8, 2016

Références Perrin, Szpirglas; un pdf de Germoni pour l'exemple explicite dans S_6.

0.1 Recasages

Passe à l'aise 104 Groupes finis. Exemples et applications.
105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Arnaques 103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient

0.2 Le développement

Références

Théorème 0.1.

$$Aut(S_n) = Int(S_n)$$

Lemme 0.2. *Si $\phi \in Aut(S_n)$ envoie transposition sur transposition, alors ϕ est intérieur.*

Proof. On rappelle que les transpositions (1i) engendrent S_n.

On a

$$\phi(1,2) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\phi(1,3) = (\alpha_1, \alpha_3)$$

En effet, (12) et (13) ne commutent pas donc leur image par σ ne sont pas à support disjoints, donc $\phi(1,3) = (\alpha_1, \alpha_3)$ ou (α_2, α_3).

Montrons que l'on a $\phi(1,m) = (\alpha_1, \alpha_m)$ pour tout m, avec les α_m distincts.

En effet, (1,3)(1,2)(1,3)=(2,3) donc $\phi(2,3) = (\alpha_2, \alpha_3)$

Or (2,3) et (1,m) sont à support disjoint, donc $\phi(1,m)$ et (α_2, α_3) aussi.

D'où $\phi(1,m) = (\alpha_1, \alpha_n)$. Posons $\alpha : i \mapsto \alpha_i$; c'est un élément de S_n.

COnsidérons $\psi : \sigma \in S_n \mapsto \alpha\sigma\alpha^{-1}$ automorphisme intérieur.

Or, ϕ et ψ sont égaux sur les transpositions qui engendre S_n, donc sont égaux : $\phi = \psi$ et donc ϕ intérieur. □

Lemme 0.3. *$\sigma \in S_n$ produit de p transpositions à supports deux à deux disjoints.*

Alors le cardinal du centralisateur de σ est $2^p p!(n-2p)!$

Proof.

$$\sigma = \prod_{i=1}^{p} (a_1^i, a_2^i)$$

Soit $\omega \in S_n$ commutant avec σ. Alors $\omega\sigma\omega^{-1} = \sigma$.

Donc

$$\prod_{i=1}^{p} (\omega(a_1^i), \omega(a_2^i)) = \prod_{i=1}^{p} (a_1^i, a_2^i)$$

Donc ω laisse stable $\{1, \ldots, n\}$ privé de $\{a_1^i, a_2^i, i \in \{1, \ldots, p\} \rightarrow$ (n-2p)! combinaisons possibles.

Et $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $\exists! j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que :

$$w(a_1^i) = a_1^i \quad \text{et} \quad w(a_2^i) = a_2^i$$

$$w(a_1^i) = a_2^i \quad \text{et} \quad w(a_2^i) = a_1^i$$

Il y a en fait p! choix possible pour les j, et chaque choix étant fait, 2 choix pour associer les images de (a_1^i, a_2^i), d'où le 2^p.

Finalement, le cardinal du centralisateur vaut bien $2^p p!(n-2p)!$ □

Proof. $\phi \in Aut(S_n)$, et τ une transposition.

$\phi(\tau)$ est d'ordre 2, donc est le produit de p transpositions. On va montrer que p=1, et conclure via le lemme précédent.

Les cardinaux des commutants de τ et $\phi(\tau)$ sont égaux.

En effet :

Cela donne la relation :

$$2^p p!(n-2p)! = 2(n-2) \tag{1}$$

équivalente à :

$$2^{p-1} = \tbinom{n-p}{p} \frac{(n-2)!}{(n-p)!} \tag{2}$$

Méthode : on fixe p et on regarde au cas par cas si il y a des n qui sont solutions.

p=1 est toujours solution.

Si p=2, on aurait (n-2)(n-3)=4, qui n'admet pas de solution $n \in \mathbb{N}$.

Si p$\geq$ 3 solution, alors la relation 2 nous impose qu'il n'y ait pas de termes impairs dans le développement en nombre premier du terme de droite. Or le rapport $\frac{(n-2)!}{(n-p)!}$ comporte plus de deux termes lorsque $n-p+1$

Un de ces termes va être impair, et ça ne sera pas solution, sauf dans le cas particulier où c'est 1, ie n-p+1=1 et n-2=2; donc n=4=p, ce qui est exclut ($n \geq 2p$).

Pour qu'il n'y ait qu'un seul terme, on impose n-p+1=n-2, donc p=3. En reportant p=3 dans l'équation 1, on trouve (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)=24. La seule solution possible est n=6.

Conclusion : Si $n \neq 6$, alors $\phi(\tau)$ est une transposition (on a nécessairement p=1), et donc ϕ est intérieur.

Si n=6, on ne peut pas conclure. En fait c'est vraiment un cas particulier □

Remarque : Fin de la preuve tortueuse à écrire, mais s'explique bien à l'oral.

Proposition 0.4. *Il existe un automorphisme de S_6 non intérieur.*

Proof. (Ref : un pdf de Germoni). On remarque que dans S_6, il y a autant de double transpo que de triple transpo (15).

Si s et t sont des triples transpo soit elles ont une transpo en commun, et alors elles commutent (la transpo en commun élevée au carré donne l'identité, le reste du calcul se passe dans V_4); sinon on a sts=tst.

On vérifie que les transpo vérifient la même propriété.

Pour construire un isomorphisme de S_6 non intérieur, on construit les images $t_1, \dots t_5$ de la base s_1 =(12), s_2=(23), s_3=(34), s_4=(45) , s_5 =(56) de la manière suivante :

deux images consécutives t_i ne doivent pas avoir de transpo en commun; deux non consécutives en ont une en commun.

Par exemple : $t_1 = (13)(24)(56)$, $t_2 = (12)(36)(45)$, $t_3 = (14)(23)(56)$, $t_4 = (13)(26)(45)$ $t_5 = (12)(34)(56)$. □