Automorphismes de K(X)

Maximilien Dreveton

July 8, 2016

Références Référence : Ramis-Warusfel-Moulisn, p.79

0.1 Recasages

Passe à l'aise 125 Extensions de corps. Exemples et applications.

127 Droite projective et birapport.

140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

Arnaques 142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

0.2 Le développement

Lemme 0.1. *Soit $F \in K(X)$, non constante, que l'on écrit sous sa forme irréductible F=A/B avec pgcd(A,B)=1. Alors K(X) est une extension finie de K(F), de degré max(deg A,deg B)*

Proof. On commence par chercher un polynôme P de K(X) qui annule F. Donc F est algébrique, et l'extension est finie. Ensuite, on montre que ce polynôme est irréductible, de degré n=max(deg A,deg B), ce qui achèvera la preuve.

Posons : $A := a_n X^n + \cdots + a_o$ $B := b_n X^n + \cdots + b_0$ Soit T une indéterminée, et introduisons P:=B(T)F-A(T) $\in K(F)[T]$.

P(X)=0. On montre que P n'est pas nul. Le coefficient de T^n de P est $b_n F - a_n$, qui est non nul car F n'est pas dans K, et au moins un des a_n ou b_n est non nul. Donc P non nul et deg P=n.

Montrons P est irréductible. En fait, P est un élément de K[T,F], donc on peut le voir comme élément de K[T][F] ou de K[F][T].

Dans K[T][F], P est de degré 1, non nul, donc irréductible. Donc P est irréductible dans K(T)[F].

Donc P est aussi irréductible dans K[F][T], donc dans K(F)[T].

□

Proposition 0.2. *Les K-automorphismes de K(X) sont exactement les homographies.*

K-automorphismes = automorphisme dont la restriction à K est l'identité.

Proof. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$. On note α_M l'homographie qui a G(X) dans K(X) associe G($\frac{aX+b}{cX+d}$) Alors α_M est un morphisme qui laisse K stable.

De plus, $\alpha_{\lambda Id} = Id$, et $\alpha_{MM'} = \alpha_{M'} alpha_M$

Donc α_M est inversible, d'inverse $\alpha_{M^{-1}}$.

Réciproquement, soit α un K-automrophisme. Posons F:$\alpha(X)$. F=A/B est non constante, donc K(X) est une extension finie de K(F), de degré n. On a $K(F) = K(\alpha(X) = \alpha(K(X)) = K(X)$ (la dernière égalité vient de la surjéctivité de α).

Donc n=1 et $F = \frac{aX+b}{cX+d}$.

□

0.3 Compléments

Théorème 0.3. *Théorème de Gauss*

Soit A un anneau factoriel. Alors P irréductible sur A[X] $\iff$ P primitif (contenu égal à 1) et irréductible sur $K_A[X]$ (le corps des fractions)

Proof. P irréductible sur A[X] $\Rightarrow$ P primitif (sinon on factorise par le contenu).

On peut donc considérer P primitif.

Soit P réductible sur $K_A[X]$, factorisation non triviale, montrons qu'il est réductible sur A[X]. (C'est la contraposé de l'implication retour).

On a P=QR sur $K_A[X]$, mais on peut multiplier en haut et en bas par des entiers bien choisis pour avoir $Q = \frac{q_n}{q_d}\tilde{Q}$ où $\tilde{Q} \in A[X]$, primitif. (q_d = mettre au même dénominateur; q_n= pgcd des numérateurs). De même pour R. On a donc : $P = \frac{q_n r_n}{q_d r_d}\tilde{Q}\tilde{R}$. En prenant les contenus, comme c(P)=1 et $c(\tilde{Q}\tilde{R}) = c(\tilde{Q})c(\tilde{R}) = 1$, on a $q_d r_d = q_n r_n$, autrement dit P=QR, qui est une factorisation non triviale dans A[X].

Réciproquement, soit P irréductible sur $K_A[X]$. Par l'absurde, montrons qu'il est irréductible sur A[X]. Supposons que l'on puisse écrire P=QR, factorisation non triviale sur A[X]. Comme P est primitif, Q et R le sont aussi, et en particulier ne sont pas des inversibles de A[X] : la factorisation est donc une factorisation non triviale sur $K_A[X]$! Absurde.

□