TP info : Calculs d'aires sous une courbe - Durée : 1h30

Date

Soit f une fonction définie sur $[0;1]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
L'objectif du TP est, connaissant l'expression de f, de calculer l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

1 Méthode des rectangles

Soit $N \in \mathbb{N}$. On va découper l'intervalle [0;1] en N sous intervalles disjoints de même taille.

Question 1.1. *Soit $k \in \{0; 1 \ldots, N-1\}$, posons $J_k = [\frac{k}{N}; \frac{k+1}{N}]$. Se convaincre que :*

1. $[0;1] = \bigcup_{i=0}^{N} J_k = J_1 \cup \cdots \cup J_{N-1}$
2. $k \neq p$ *alors* $J_k \cap J_p = \emptyset$

Autrement dit, on a découpé l'intervalle [0;1] en N intervalle plus petits, deux à deux disjoints.
Maintenant, on approxime la courbe $\mathcal{C}_f$ par N rectangles. Le kième rectangle a une base J_k et une hauteur $f(k)$

Question 1.2. *Faire un schéma pour une petite valeur de N.*

La méthode donne une aire approchée, mais on peut espérée qu'elle soit proche de la vrai aire lorsque N est grand.

Question 1.3.

2 Un premier exemple : $f : x \mapsto x$

Question 2.1. *Mettre en place la méthode des rectangles pour $f : x \mapsto x$.*

3 Un second exemple : $f : x \mapsto x^2$

Question 3.1. *Reprendre les questions de la partie précédente avec $f : x \mapsto x^2$.*

4 Pour aller plus loin

On propose ici des pistes de suggestions.
- Comment modifier la méthode si l'on change l'intervalle [0;1] en [a;b] ?
- Calculer exactement l'erreur commise en fonction de N dans le cas $f : x \mapsto x$. Retrouve-t-on les valeurs des simulations de la deuxième partie ?
- Essayer avec d'autres fonctions que vous connaissez.
- Donner l'expression de la fonction qui à $y \in \mathbb{R}$ associe l'aire sous la courbe de f entre [0;y] (par exemple $f(x) = x; f(x) = x^2$).