G5 - Équations de droite

Maximilien Dreveton

March 22, 2017

1 Équation de droite

1.1 Lien entre droite et fonction affine

La proposition suivante a été montrée dans le cours sur les fonctions affine.

Proposition 1.1. *La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ est une droite d (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées).*

On dit que cette droite d a pour équation $y = mx + p$. Cela veut dire qu'un point M(x;y) appartient à d si et seulement si $y = mx + p$.

Exemple Soit d la droite d'équation $y = 2x + 3$. Les points suivant appartiennent-ils à d ?

$$A(2;3) \quad B(0;3) \quad C(1;5) \quad D(-1,5;0)$$

Exercice 1 : Soit $d : y = -2x + 5$. Tracer d. Calculer y_A et x_B tels que $A(0;y_A)$ et $B(x_B;0)$ appartiennent à d.

Vocabulaire : A est appelé intersection de d avec l'axe des abscisses. B est l'intersection de d avec l'axe des ordonnées.
Vocabulaire : m est le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine.

Question : Réciproquement, toute droite tracée dans un repère est-elle la représentation graphique d'une fonction affine ?

Proposition 1.2. *Dans un repère, toute droite d :*

- *non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$*
- *parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = c$*

Proof. On distingue les cas où la droite est parallèle à l'axe des ordonnées des cas où elle ne l'est pas.

- Cas d non parallèle à l'axe des ordonnées.

  Alors d coupe l'axe des ordonnées en A(0;p) et passe par un point B(1;q). Montrons qu'il existe alors une fonction affine f telle que $f(0) = p$ et $f(1) = q$. En effet, $f(x) = (q - p)x + p$ convient. La représentation graphique de la fonction f est une droite, passant par les points A et B : c'est donc la droite d (car par deux points passe une et une seule droite).

- Cas où d est parallèle à l'axe des ordonnées. Soit C(0;c) le point d'intersection de d avec l'axe des abscisses. Un point M(x;y) appartient à d si et seulement si M et C ont même abscisse, donc $x = c$.

□

1.2 En pratique : calcul de l'équation d'une droite

Définition 1. *La droite d'équation $y = mx + p$ a pour coefficient directeur m et pour ordonnée à l'origine p.*

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points, avec $x_A \neq x_B$, alors le coefficient directeur de la droite (AB) vaut :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercice 2 : Dans un repère, A(-2;4) et B(2;2) sont deux points. Déterminer l'équation de la droite (AB). Puis dire si les points C(50;-22) et D(-17,5;11,5) appartiennent à la droite (AB).

Proof. Méthode : la droite (AB) a pour équation $y = mx + p$. On veut donc déterminer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b.

Coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = ... = -\frac{1}{2}$

Donc $y = -\frac{1}{2}x + p$

Ordonnée à l'origine Le point A(-2;4) appartient à la droite (AB), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. $4 = -\frac{1}{2}2 + p$, donc $p = 3$.

Conclusion L'équation de la droite (AB) est $y = -\frac{1}{2}x + 3$

□

Exercice 3 : A(-1;-1) et B(2;5). Donner une équation de la droite (AB). Le point C(10;21) appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 4 : A(-1;-1) et B(-1;5). Donner une équation de la droite (AB).

2 Droites parallèles, droites sécantes

2.1 Critère de parallélisme

Proposition 2.1. *Dans un repère, deux droites d et d' sont parallèles si et seulement si leur coefficients directeurs sont égaux.*

Proof. On note $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p$.

On prend A, B deux points sur la droite d, et A', B' deux points de la droite d'. Alors d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \vec{A'B'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le produit en croix des coordonnées est nul, ce qui s'exprime par :

$$(y_{B'} - y_{A'}) \times (x_B - x_A) = (y_B - y_A) \times (x_{B'} - x_{A'})$$

donc :

$$\frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

□

Corollaire 2.2. *Pour montrer que trois points A,B et C sont alignés, il suffit de démontrer que les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.*

Exercice 5 : On donne cinq points dans un repère :

$$A(-1;2) \quad B(\frac{1}{2};3) \quad C(\frac{5}{2};\frac{5}{2}) \quad D(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}) \quad E(3;\frac{14}{3})$$

a) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

b) Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?

c) Déterminer l'équation de la droite d parallèle à (AD) passant par C.

d) Les points A,B,E sont-ils alignés ?

2.2 Intersection de deux droites sécantes

Proposition 2.3. *Dans un repère, deux droites d et d' sont sécantes si et seulement si leur coefficients directeurs sont différents, c'est à dire $m \neq m'$.*

Pour déterminer les coordonnées de ce point, on résout le système :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

3 Systèmes de deux équations à deux inconnues