G2 – Géométrie dans l'espace

I Représentation dans l'espace

I.1 Perspective cavalière

Définition I.1 — La perspective cavalière respecte les règles suivantes :

1. Toute figure située dans un plan vu de face est représentée en vraie grandeur (formes et dimensions conservées)
2. Le parallélisme est conservé
3. L'alignement est conservé
4. Les milieux sont conservés
5. Les arrêtes visibles sont représentées en trait plein, et les arrêtes cachées en trait pointillés.

Exemple I — Tracer un pavé droit.

Exemple II — Exemple de la maison. Que manque-t-il au schéma ? Donner la face avant, et le sol (face du dessous).

I.2 D'autres représentations

— Patrons, maquettes

— Plan de coupe : section d'un solide par un plan

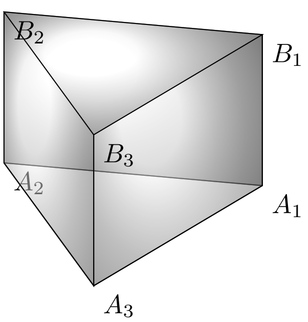
— (*) Représentations Cram, Fischer, Lewis, Newman (chimie)

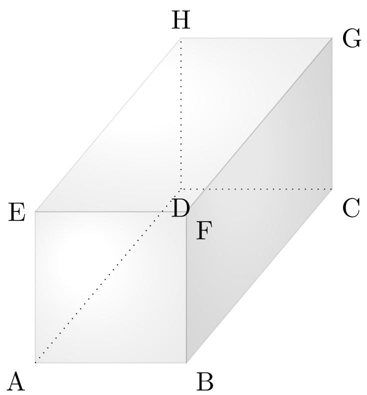
I.3 Solides usuels

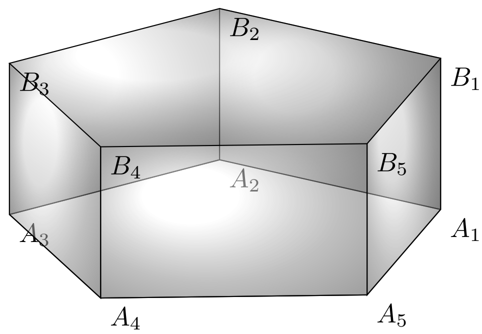
I.3.1 Solides droits

Définition I.2 — Un prisme droit est un polyèdre qui a deux faces parallèles et superposables et dont les autres faces sont rectangulaires.

Exemple III — On donne des exemples, lorsque la base a 3, 4 et 5 côtés.







Remarque I Les prismes droits à base triangulaire sont utilisés en optique (diffraction de la lumière). En général, on les représente alors en coupe.

Proposition I.1 — *Le volume d'un solide droit est $V = \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est la surface de la base et h la hauteur.*

En particulier, pour un pavé droit, on a $V = abc$ (où a, b et c sont les longueurs des côtés).

Exemple IV — Considérons le pavé droit ABCDEFGH, telle que AB=4cm, AD=3cm et AE=2cm.

1. Représenter le solide en perspective cavalière. On placera la face ABFE dans le plan frontal.
2. Calculer le volume de ABCDEFGH.

Exemple V — On donne les dimensions de l'iPhone 7 : 138,3mm par 67,1mm par 7,1mm.

— Calculer le volume, en cm^3, de l'iPhone 7.

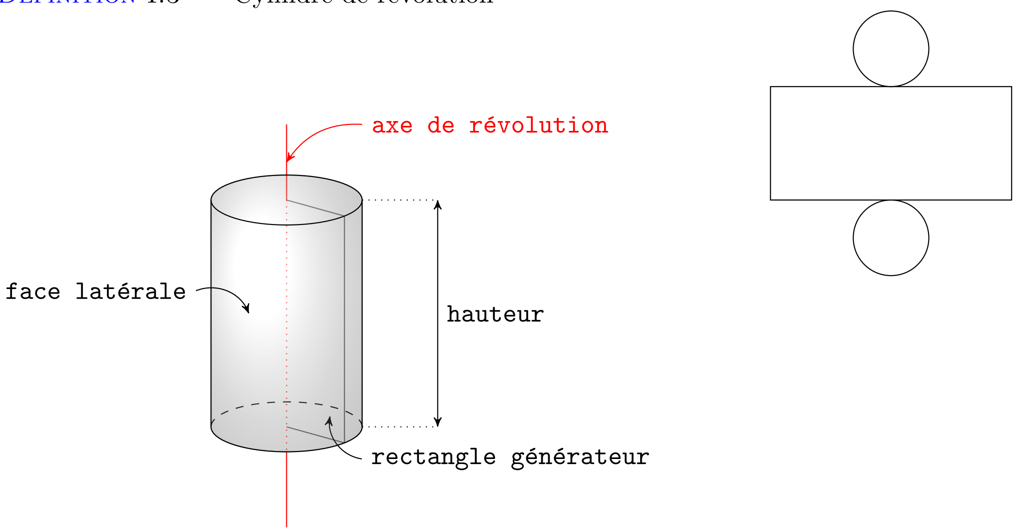
— Calculer la taille de son écran, si celui-ci recouvrait toute la face, en pouces. On donne 1 pouce = 2,54 cm.

Preuve

1. $V = 138,3 \times 67,1 \times 7,1 = 65887mm^3 = 65.9cm^3$
2. La longueur de la diagonale se calcule avec le théorème de Pythagore. On a donc : diagonale = $\sqrt{138.3^2 + 67.1^2} = 153,7mm = 15.37cm = 6$ pouces, ce qui est plus que la vraie taille (4,7 pouces) (normal car l'écran ne recouvre pas toute la face !). □

I.3.2 Cylindre

Définition I.3 — Cylindre de révolution



Proposition I.2 — *Le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et dont la base a un rayon r est $V = \pi r^2 h$. (On retrouve $V = \mathcal{B} \times h$).*

Exemple VI — Une fibre optique est un composant cylindrique permettant le transport de l'information à l'aide de la lumière.

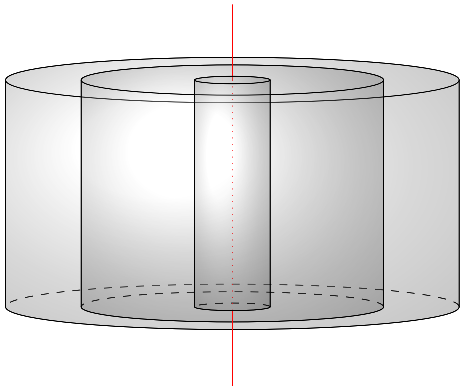
Elle est composé de 3 constituant cylindriques, dont on donne les diamètres :

— un cœur : $10\mu m$

— une gaine optique $125\mu m$

— une gaine plastique : $250\mu m$

1. Calculer le volume du cœur, de la gaine optique et de la gaine plastique pour une fibre de 100km de long.
2. La gaine plastique est deux fois plus larde que la gaine optique. Le volume de la gaine plastique est-il deux fois celui de la gaine optique ? Est-ce normal ?



Preuve On fera attention à mettre toutes les distances dans la même unité, par exemple le mètre.

1. Le cœur est un cylindre de rayon $R_{coeur} = 10\mu m = 10 \times 10^{-6} m$ et de longueur $100km = 100 \times 10^3 m$. Donc

$$
\begin{aligned}
V_{coeur} &= \pi R_{coeur}^2 \times 100 && (1)\\
&= \pi (10 \times 10^{-6})^2 \times 100 \times 10^3 && (2)\\
&= 3,1 \times 10^{-5} m^3 && (3)
\end{aligned}
$$

2. Appelons $V_{cylindre125}$ le volume d'un cylindre de rayon $125\mu m$ et de longueur 100km.

$$
\begin{aligned}
V_{gaine\ optique} &= V_{cylindre125} - V_{coeur} && (4)\\
&= \pi \times (125 \times 10^{-6})^2 \times 100 \times 10^3 - \pi(10 \times 10^{-6})^2 \times 100 \times 10^3 && (5)\\
&= \pi \times 125^2 \times 10^{-12} \times 10^5 - \pi \times 10^2 \times 10^{-12} \times 10^5 && (6)\\
&= \pi \times 125^2 \times 10^{-7} - \pi \times 100 \times 10^{-7} && (7)\\
&= \pi \times 10^{-7} \times (125^2 - 100) && (8)\\
&= \pi \times 10^{-7} \times 15525 && (9)\\
&\approx 0,00488 m^3 && (10)\\
&\approx 4,88 \times 10^{-3} m^3 && (11)
\end{aligned}
$$

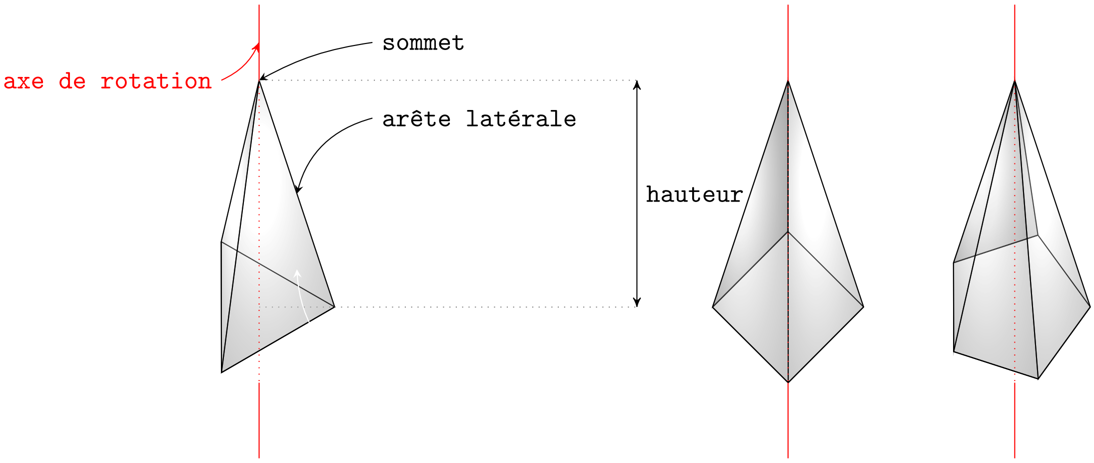
3. De même, appelons $V_{cylindre250}$ le volume d'un cylindre de rayon $250\mu m$ et de longueur 100km.

$$
\begin{aligned}
V_{gaine\ plastique} &= V_{cylindre\ 250} - V_{gaine\ optique} && (12)\\
&= \pi \times (250 \times 10^{-6})^2 \times 100 \times 10^3 - V_{gaine\ optique} && (13)\\
&\approx -4,88 \times 10^{-3} && (14)\\
&\approx 0,0146 m^3 && (15)\\
&\approx 1,46 \times 10^{-2} m^3 && (16)
\end{aligned}
$$

4. Non, car le rayon du cylindre intervient au carré dans la formule. On a $R_{plastique} = 2R_{gaine}$, mais $V_{plastique} = 2^2 V_{gaine} = 4V_{gaine}$ (en négligeant le volume du cœur). □

I.3.3 Pyramides et cônes

Exemple VII — On donne des exemples de pyramide à base triangulaire (tétraèdre), à base carré et à base pentagonale.



Proposition I.3 — *Le volume d'une pyramide ou d'un cône est $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est la surface de la base et h la hauteur.*

Exemple VIII — En Egypte, la pyramide de Khéops est une pyramide à base carré de 230,5 mètres de côté, et de hauteur 146m.

1. Calculer son volume.
2. La pyramide est faite à partir de blocs de calcaire, qui sont des pavés droits de taille 105 cm par 120 cm par 90 cm. Donner, en m^3, une approximation du nombre de pierre nécessaire pour construire la pyramide.
3. Le calcaire a une masse volumique de $\rho_{calcaire} = 2600kg/m^3$. Donner le poids d'un bloc de pierre.
4. En déduire une estimation du poids, en tonne, de la pyramide de Khéops.

Preuve

1. $V_{pyramide} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \dfrac{1}{3}(230,5)^2 \times 146 = 2585672m^3 = 2,586 \times 10^6 m^3$

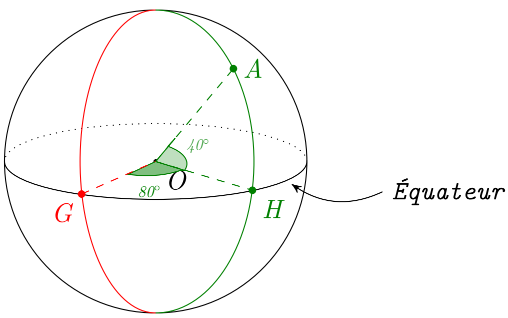
   Volume donné par Wikipédia : 2 592 341 m^3.
2. $V_{bloc} = abc = 1,05 \times 1,20 \times 0,90 = 1.1m^3$.

   La pyramide faisant un volume de $V_{pyramide}$, il a fallu $\dfrac{V_{pyramide}}{V_{bloc}} = 2350909$ blocs de pierre (disons 2,4 millions) pour construire la pyramide. (Wikipédia donne une estimation de 2,3 millions).
3. Chaque bloc de pierre pèse $M_{bloc} = V_{bloc} \times \rho_{calcaire} = 1.1 \times 2600 = 2.9t$.
4. Il y a 2,4 millions de blocs dans la pyramide, donc la masse de la pyramide est d'environ $M_{pyramide} = 2.9 \times 2,4 \times 10^6 = 7 \times 10^6 t$

□

I.3.4 Boule

Proposition I.4 (Volume et aire d'une boule) —



Une boule de rayon r a une surface de $S = 4\pi r^2$ et un volume de $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exemple IX — Le Soleil a un rayon 695 700 km et de masse volumique moyenne de 1 408 kgm^{-3}. Calculer la masse totale du Soleil.

Preuve On calcule le volume du Soleil.

$$\begin{aligned} V_{Soleil} &= \frac{4}{3}\pi R^3 && (17)\\ &= \frac{4}{3}\pi \times (695700)^3 && (18)\\ &= 1,410 \times 10^{18} km^3 && (19) \end{aligned}$$

La masse volumique est donnée en kgm^{-3}, et on a le volume en km^3. Il faut donc convertir. Exprimons par exemple le volume du Soleil en m^3. On a : $1km = 1000m = 10^3 m$, donc $(1km)^3 = (10^3)^3 m = 10^9 m$.

Donc $V_{Soleil} = 1,410 \times 10^{18} km^3 = 1,410 \times 10^{18} \times 10^9 m^3 = 1,410 \times 10^{27} m^3$

Donc $M_{Soleil} = \rho_{Soleil} \times V_{Soleil} = 1408 \times 1,410 \times 10^{27} = 1,99 \times 10^{30} kg$ □

Exemple X — La champ de pesanteur d'un objet sphérique de rayon R et masse M est donné par $g = G\dfrac{M}{R^2}$. On donne $G = 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Calculer la force subie par un corps à la surface du Soleil. Comparer avec la Terre.

Exemple XI — Dans un livre d'histoire géographie, on peut lire : *"Sur la Terre, la superficie des océans est de 360 000 000 km^2. Ainsi, les océans recouvrent les deux tiers de la surface terrestre."*

1. Calculer la surface de la Terre. On supposera que la Terre est une boule de rayon 6 400km.
2. Calculer le rapport entre la surface des océans et la surface de la Terre.
3. Commentez cette phrase.

Preuve On suppose que la Terre est une boule parfaite, de rayon R = 6 400km. Sa surface est alors de

$$S_{Terre} = 4\pi R^2 = 5,1 \times 10^8 km^2 \tag{20}$$

(Remarque : valeur donnée par Wikipédia est de 510 200 000 km^2 pour la surface de la Terre, contre 361 220 420 km^2 pour les océans).

Or on donne $S_{ocean} = 361220420 km^2$. Donc le rapport des deux vaut :

$$\frac{S_{ocean}}{S_{Terre}} = \frac{3,6 \times 10^8}{5,1 \times 10^8} = 0,7 \tag{21}$$

Le rapport entre les deux surfaces est de $0,7 = \frac{7}{10}$. Or $\frac{2}{3} \approx 0,7$, ce qui explique que l'on donne la valeur de $\frac{2}{3}$. La valeur $\frac{2}{3}$ est certes approximative, mais aussi plus simple à retenir. □

Exemple XII — Le même livre ajoute quelques lignes plus bas : *"Le volume d'eau compris dans les océans est de 1322$\times 10^6 km^3$".*

Commentez la phrase, sachant que la profondeur moyenne des océans est de 4 000m.

Preuve $V_{Terre} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1,098 \times 10^{12} km^3$.

On calcule le volume Terrestre compris entre 0km et 4 000m = 4km de profondeur. A 0km de profondeur (c'est à dire sur la surface de la Terre), le volume est celui d'une sphère de rayon 6 400km. A 4km de profondeur, c'est le volume d'une sphère de rayon 6400 - 4 = 6396 km.

$$\begin{aligned} V_{calotte} &= V_{profondeur0} - V_{profondeur4000m} && (22)\\ &= \frac{4}{3}\pi 6400^3 - \frac{4}{3}\pi(6400-4)^3 && (23)\\ &= 2,06 \times 10^9 km^3 && (24)\\ & && (25) \end{aligned}$$

□

On a vu que les océans accomptent pour 0,7 de la surface terrestre, donc $V_{ocean} = 0,7 V_{calotte} = 1,44 \times 10^9$.

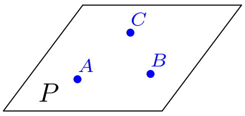
Le livre donne un volume de 1322$\times 10^6 km^3$ = 1,322 $\times 10^9 km^3$, ce qui est proche du volume que l'on vient de trouver.

II Droites et plan de l'espace

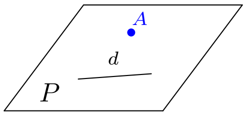
Proposition II.1 — *Par deux points distincts A, B de l'espace passe une droite et une seule, notée (AB).*
- *Par trois points A, B et C* ***non alignés*** *passe un plan et un seul, que l'on note (ABC).*
- *Si deux points M et N appartiennent à un même plan $\mathcal{P}$, alors la droite (MN) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$. C'est à dire que tous les points appartenant à la droite (MN) appartiennent aussi au plan $\mathcal{P}$. On note alors $(MN) \subset \mathcal{P}$.*

Exemple XIII — Maison.
Comment peut-on noter autrement le plan (AIB). Même question avec (LDC) puis (EFN).

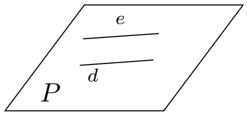
Proposition II.2 — *Un plan peut être défini par :*



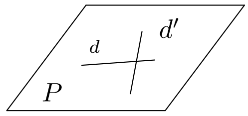
a) 3 points non alignés



b) 1 droite et 1 point (n'appartenant pas à la droite)



c) Deux droites parallèles (non confondues)



d) Deux droites sécantes

Exemple XIV — Maison. Le plan de la partie droite du toit (JKL) peut être défini par :
- Les points J, K et L
- La droite (JK) et le point L
- Les droites parallèles (JK) et (PN)
- Les droites sécantes (JK) et (KL)

Définition II.1 — Deux éléments de l'espace situés dans un même plan sont dits coplanaires.

Exercice I — Dans la maison, donner un exemple de :
1. quatre points coplanaires
2. quatre points non coplanaires
3. deux droites coplanaires
4. deux droites non coplanaires

Proposition II.3 — *Les résultats (propriétés, théorèmes) de géométries planes s'appliquent aussi dans tous les plans de l'espace.*

III Intersections dans l'espace (Position relatives de droites et plans de l'espace)

III.1 Intersections de deux droites

Définition III.1 — Soient d_1 et d_2 deux droites distinctes de l'espace. Il y a 3 cas possibles.

1. Les droites ont un **unique point d'intersection**. On dit qu'elles sont **sécantes**. Il existe alors un unique plan P qui contient d_1 et d_2. Les droites sont donc **coplanaires**.
2. Il existe un plan P qui contient les deux droites (les droites sont donc **coplanaires**), mais les deux droites **ne se croisent jamais**. On dit qu'elles sont **parallèles**.
3. Les droites ne sont pas coplanaires.

Faire un schéma des 3 cas possibles. Exemple avec la salle de classe.

Exemple XV — Dans la maison, donner un exemple de 2 droites non coplanaires, 2 droites sécantes, 2 droites parallèles.

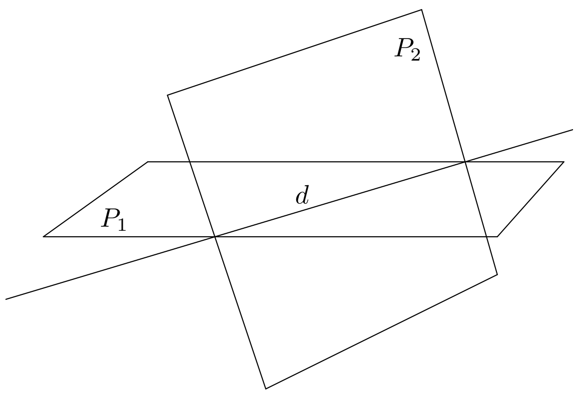
Remarque II Contrairement au cas de la géométrie plane, deux droites de l'espace qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.

Exemple XVI — Dans chaque cas, donner la position relative des deux droites :

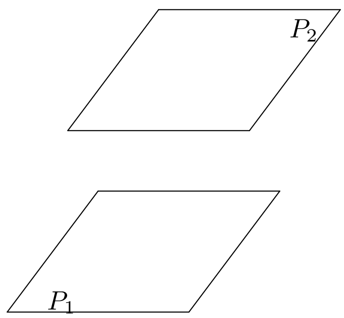
1. (IH) et (M N) :
2. (KL) et (DE) :
3. (JA) et (LH) :
4. (CD) et (LH) :
5. (M G) et (F E) :
6. (AI) et (KB) :

III.2 Intersections de deux plans

Proposition III.1 — *Deux plans distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :*



— *soit sécants selon une droite*



— *soit parallèles*

Exemple XVII — Maison

Dans chaque cas, donner la position relative des deux plans :

1. (GDE) et (BIC)
2. (ABC) et (CDG)
3. (MGF) et (CDE)

4. (KIH) et (CDG)

Proposition III.2 — *Considérons deux plans P_1 et P_2 parallèles. Alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles.*

Faire le schéma.

III.3 Intersections d'une droite et d'un plan

Proposition III.3 — *Considérons une droite d et un plan $\mathcal{P}$. Il y a trois cas possibles.*

— *La droite d coupe le plan $\mathcal{P}$ en un unique point.*

— *La droite d est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.*

— *La droite d ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$. On dit alors qu'elle est parallèle à $\mathcal{P}$.*

On convient d'englober dans le cas parallèle le cas où la droite d est inclue dans le plan $\mathcal{P}$.

Faire le schéma.

Exemple XVIII — Maison

Dans chaque cas, donner la position relative du plan et de la droite :

1. (GD) et (CDE) :
2. (GF) et (GDE) :
3. (GD) et (ABI) :
4. (MN) et (CDE) :
5. (NF) et (ABI) :
6. (MG) et (CDE) :

IV Parallélisme dans l'espace

IV.1 Parallélisme d'une droite avec un plan

Proposition IV.1 — *Lorsqu'une droite d est parallèle à une droite d' d'un plan $\mathcal{P}$, alors d est parallèle à ce plan.*

Exercice II — Exo avec milieu tétraèdre/pyramide.

Montrer que (IK) est parallèles au plan (ABC).

IV.2 Parallélisme de deux plans

Proposition IV.2 — *Considérons deux plans P_1 et P_2, parallèles à un même plan P_3. Alors P_1 et P_2 sont parallèles.*

Proposition IV.3 — *Prenons deux droites sécantes d_1 et d_2 contenues dans un plan P_1. Supposons que d_1 et d_2 sont toutes les deux parallèles à un autre plan P_2.*

Alors les plans P_1 et P_2 sont parallèles.

Exercice III — Exo avec milieu tétraèdre

Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Corollaire IV.1 — *Prenons deux droites sécantes d_1 et d_2 contenues dans un plan P_1. Prenons de même deux autres droites d'_1 et $d'2$ contenues dans un autre plan P_2.*

Supposons que $d_1 /\!/ d'_1$ et $d_2 /\!/ d'_2$. Alors $P_1 /\!/ P_2$.

IV.3 Parallélisme de droites

Proposition IV.4 — *$d_1 /\!/ d_2$ et $d_2 /\!/ d_3$, alors $d_1 /\!/ d_3$*

Proposition IV.5 — *Considérons deux plans P_1 et P_2 strictement parallèles. Prenons un troisième plan P_3 qui coupe P_1 en une droite d_1.*

Alors P_3 coupe aussi P_2 en une droite d_2, et en plus on a $d_1 /\!/ d_2$.

Schéma

Théorème IV.1 (Théorème du toit) — *(*)*