Vecteurs

Maximilien Dreveton

November 16, 2016

1 Notion de vecteurs; translation

1.1 Translation et vecteur

Définition 1. *Soient A et B deux points du plan. La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments [AD] et [BC] aient même milieu.*

Dans ce cas, on dit que D est l'image de C par cette translation.

Remarque : D est le point tel que AB**D**C est un parallélogramme.

Interprétation Lorsque A et B sont distincts, la translation qui transforme A en B est un glissement :

- dans la direction de la droite (AB)
- dans le sens de A vers B
- de longueur AB

Définition 2. *La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur* $\vec{AB}$.

Représentation d'un vecteur

- Lorsque les points A et B sont distincts, le vecteur $\vec{AB}$ est symbolisé par une flèche de A vers B. La longueur AB est appelée la norme du vecteur $\vec{AB}$.
- Le point A est appelé l'origine du vecteur $\vec{AB}$, et B son extrémité.

Cas particulier : vecteur nul Dans la translation qui transforme A en A, chaque point est sa propre image. Le vecteur $\vec{AA}$ de cette translation est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$. C'est le seul vecteur sans direction ni sens.

1.2 Égalité entre deux vecteurs

Définition 3. *On dit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux lorsque D est l'image de C dans la translation de vecteur $\vec{AB}$.*

On note $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Proposition 1.1. *On considère deux points du plan distincts A et B.*

- $\vec{AB} = \vec{CD} \iff$ *ABDC est un parallélogramme*
- $\vec{AB} = \vec{CD} \iff$ *les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même direction, même sens et même longueur.*

Proof. En exo. □

1.3 Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère d'origine O.

Définition 4. *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et M l'image de O dans la translation de vecteur $\vec{u}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M.*

Proposition 1.2. *Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour abscisse $(x_B - x_A)$ et ordonnée $(y_B - y_A)$ et on note :*

$$\vec{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Exercice A(-2;3); B(4;5); C(7;1); D(1;-1). Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Proof. Avec la formule, $\vec{AB} = \binom{6}{2}$. De même, $\vec{DC} = \binom{6}{2}$.
Donc $\vec{AB} = \vec{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme. □

2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Somme de deux vecteurs

Définition 5. *La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation correspondant à l'enchainement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Proposition 2.1. *Relation de Chasles*

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Remarque On ne prononce pas les "s" dans Chasles. Seul les français appellent cette relation la relation de Chasles, et elle était connue des siècles bien avant lui, mais on l'a nommé d'après Chasles probablement par moquerie. (Le-dit Chasles ayant fait des travaux et découvertes bien plus poussés en géométrie projective, adosser son nom à une relation aussi simple est à la limite de l'insulte).

Exercice Montrer que

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \tag{1}$$

Proof.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

□

Proposition 2.2. *Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ $\vec{v}\binom{c}{d}$. Alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{a+c}{b+d}$.*

Proposition 2.3. *Soient u,v deux vecteurs.*

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Exercice Montrer que

$$\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} = \vec{0} \tag{2}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CE} + \vec{DA} + \vec{EB} &= \vec{AC} + \vec{CE} + \vec{BD} + \vec{DA} + \vec{EB} && (3)\\
&= \vec{AE} + \vec{BA} + \vec{EB} && (4)\\
&= \vec{AE} + \vec{EB} + \vec{BA} && (5)\\
&= \vec{AB} + \vec{BA} && (6)\\
&= \vec{0} && (7)
\end{aligned}$$

□

2.2 Opposé d'un vecteur

Définition 6. *L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que :*

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Pour $\vec{u} \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même norme, même direction mais des sens contraire.

Proposition 2.4.

$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

Proof. Avec Chasles, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$. □

Proposition 2.5. *$\vec{u}$ de coord .. alors $-\vec{u}$ de coord ...*

2.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition 7. *Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}\binom{x}{y}$ un vecteur du plan dans un repère.*

On note $k\vec{u}$ le vecteur dont les coordonnées sont $\binom{kx}{ky}$

Proposition 2.6. *Pour tout $k, k' \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :*

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad (k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u} \quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

Remarque culturelle La multiplication de deux vecteurs entre eux sera vu en première (produit scalaire) et terminale (produit vectoriel).

3 Applications

3.1 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 8. *Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.*

Par convention, $\vec{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Exemple $\vec{AB}$ colinéaire à $\vec{DC} \iff (AB) \parallel (DC)$

Proposition 3.1. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si l'un deux est égal au produit de l'autre par un réel, c'est à dire s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.*

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, cad $xy' - x'y = 0$.

Exercice A(1;2) B(3;4); C(0;1) et D(7;10). $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont ils colinéaires ?

Exercice Trouver a tel que $\vec{u} = \binom{2}{5}$ et $\vec{v} = \binom{a}{3}$ soient colinéaires.

3.2 Application : parallélisme de droites, points alignés

Proposition 3.2. *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.*

Les points A,B et C sont alignés ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Le point I est le milieu du segment [AB] ssi on a l'égalité $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Exercice A(-6;1); B(6;6); C(18;11). A,B et C sont-ils alignés ?

Proof. $\vec{AB} = \binom{12}{5}$ et $\vec{AC} = \binom{24}{10}$, donc $\vec{AB} = 2\vec{AC}$, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, et donc A,B et C sont alignés. □

Exercice A(-1;3) B(2;5) C(1;6) D(10;y). Trouver y tel que (AB) et (CD) soient parallèles.

4 Compléments

4.1 (*) Retour sur la définition d'un repère; notion de base

On rappelle la définition donnée dans le cours sur le repérage dans le plan.

Définition 9. *Un repère (du plan) est un triplet (O;I;J) où O,I et J sont trois points distincts non alignés du plan.*

Exercice Dans $(O; I; J)$ donner les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.

On remarque que trois points non alignés forment deux vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$ non colinéaires. Un repère revient donc à se donner une origine O et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. On dit que le couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base (de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.)

Définition 10. *Un repère (du plan) est un triplet $(O; \vec{u}; \vec{v})$ où O est l'origine et $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs du plan non colinéaires.*

Proposition 4.1. *Deux vecteurs u,v non colinéaires forment une base de l'ensemble des vecteurs du plan, c'est à dire tout vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de u et v.*

Proof. Soient u,v deux vecteurs non colinéaires, et soit w un troisième vecteur.

Montrons que w est combinaison linéaires de u et v.

En fait $w = (w|u)u + (w|v)v$ où $(w|u)$ désigne le produit scalaire canonique de w sur u. □

4.2 Espace vectoriel (**)