Fiche exo 19 - Fonction inverse et homographique

1 Fonction inverse

Solution: Exercice 2

1. Lorsque $0,2 \leq x \leq 10$, on a $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{0{,}2}$
2. Lorsque $-0,1 \leq x \leq -\frac{1}{100}$, on a $-\frac{1}{-\frac{1}{100}} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-0{,}1}$, donc $-100 \leq \frac{1}{x} \leq -10$
3. Lorsque $\frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10}$, on a $\frac{1}{\frac{1}{10}} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\frac{1}{20}}$, donc $10 \leq \frac{1}{x} \leq 20$
4. Lorsque $-\frac{10}{3} < x < -2$, on a $\frac{1}{-2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{-\frac{10}{3}}$, donc $-0,5 < \frac{1}{x} < -\frac{3}{10}$

Solution: Exercice 3

1.

x	4		$+10$
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{10}$

2. Le minimum de f est $f(10) = \frac{1}{10}$ et le maximum est $f(4) = \frac{1}{4}$.
3. Pour tout x compris entre 4 et 10, $f(x)$ est compris entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{4}$.

Solution: Exercice 4

1. On exclut 0 car g n'est pas définie en 0.
2.

x	-2		0		$+10$
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{10}$

3. g n'admet ni maximum ni minimum.
4. Pour tout $x \in [-2; 0[\cup]0; 10]$, $g(x) \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Solution: Exercice 5 Non, trois points sur une hyperbole ne seront pas alignés. Me demander pour des indications.

Solution: Exercice 6

1. f est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
2. Lorsque $x \in [10; 100]$, on a $f(x) \in [\frac{1}{100}; \frac{1}{10}]$
3. Lorsque $x \in [-0,1; -0,01]$, on a $f(x) \in [\frac{1}{-0{,}01}; \frac{1}{-0{,}1}]$
4. Lorsque $x \in]-1\,; 0[\cup]0\,; 1]$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^*$ (on rappelle $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$)
5. Lorsque $x \in [-2\,; 0[\cup]0\,; 4]$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^*$ (on rappelle $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$)
6. Lorsque $x \in]-2\,; -1[\cup[1\,; 2]$, on a $f(x) \in]-1; \frac{1}{-2}[\cup[\frac{1}{2}; 1] =]-1; -0,5[\cup[0,5; 1]$

Solution: Exercice 7 à faire en DM

2 Fonctions homographiques

Solution: Exercice 8 f est une fonction affine. i n'est pas une fonction homographique (à cause du x^2 au dénominateur). Seules h et g sont des fonctions homographiques.

Solution: Exercice 9

1. f est définie seulement lorsque le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire lorsque $7x \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$
2. g est définie lorsque le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire lorsque $x-2 \neq 0$. Donc g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
3. h est définie lorsque le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire lorsque $10-0,1x \neq 0$. Donc h est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{100\}$

Solution: Exercice 10

1.

$$\frac{3x+4}{x-2} - 3 = \frac{3x+4}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} \tag{1}$$
$$= \frac{3x+4-3(x-2)}{x-2} \tag{2}$$
$$= \frac{3x+4-3x+6}{x-2} \tag{3}$$
$$= \frac{10}{x-2} \tag{4}$$

2.

$$1 + \frac{2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{2}{x-2} \tag{5}$$
$$= \frac{x-2+2}{x-2} \tag{6}$$
$$= \frac{2}{x-2} \tag{7}$$

Solution: Exercice 11
à faire en DM

Solution: Exercice 12

1.
2. Si on prend $x = 4$, on va se retrouver à diviser par 0, ce qui est impossible.
3. L'algo 1 correspond à la fonction $f_1(x) = \frac{2x-5}{x-4}$.
   L'algo 2 correspond à $f_2(x) = \frac{3}{x-4} + 2$.
   L'algo 3 correspond à $f_3(x) = \frac{5-2x}{4-x}$.
   L'algo 4 correspond à $f(x) = 2 - \frac{3}{4-x}$.
   Pour vérifier quelles fonctions sont égales, on les ramènes toutes sur le même dénominateur.
   $f_2(x) = \frac{3}{x-4} + \frac{2(x-4)}{x-4} = \frac{3+2x-2\times 4}{x-4} = \frac{2x-5}{x-4}$
   $f_4(x) = \frac{2(4-x)}{4-x} - \frac{3}{4-x} = \frac{8-2x-3}{4-x} = \frac{-2x+5}{4-x} = \frac{2x-5}{x-4}$
   On remarque donc que f_1, f_2 et f_4 sont les mêmes fonctions, donc les algos 1, 2 et 4 sont les mêmes.

Solution: Exercice 13

1. Appelons p le prix initial. Après l'augmentation de 10%, le prix devient $p + \frac{10}{100}p = p(1 + \frac{10}{100}) = 1,1p$.

   On diminue de 10%, mais en partant de $1,1p$ et non de p ! Donc le prix final est de $1,1p \times (1 - \frac{10}{100}) = 1,1 \times 0,9p = 0,99p$. Comme p est positif, on a $0,99p < p$: le prix final est inférieur au prix de départ.

2. On a $p' = (1+\frac{t}{100})p$. On diminue alors p' de t' pourcent, cela donne un prix de $p' \times (1-\frac{t'}{100})$, c'est à dire $(1-\frac{t'}{100}) \times (1+\frac{t}{100})p$.

   Ce prix est égal au prix initial de p à condition que $(1 - \frac{t'}{100}) \times (1 + \frac{t}{100}) = 1$.

   Cela donne $\frac{100-t'}{100} \times \frac{100+t}{100} = 1$. Donc $(100+t)(100+t') = 10000$, c'est à dire $100-t' = \frac{10000}{100+t}$. On arrive à $-t' = \frac{10000}{100+t} - 100$, c'est à dire : $t' = 100 - \frac{10000}{t+100}$

   t' est donc une fonction homographique (la variable étant t; si cela n'est pas clair, poser $f(x) = 100 - \frac{10000}{x+100}$). Cette fonction est croissante.