F6 - Fiche d'exo 18 - Fonctions polynomiales - 11 Mai 2017

Exercice 1 : Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ est croissante sur

   (a) $]-\infty; 1]$ (b) $[1; +\infty[$ (c) $[-3; +\infty[$

2. La parabole représentant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)(x-5)$ a pour sommet le point de coordonnées

   (a) (-1;5) (b) (-2;7) (c) (2;-9)

3. La parabole représentant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x+3)^2 + 1$ admet comme maximum :

   (a) -2 (b) -3 (c) 1

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2(x+1)(x-3)$

1. Sous quelle forme est donnée la fonction f ?
2. f admet-elle un maximum ? un minimum ?
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentant f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer l'allure de la courbe représentant f.

Exercice 3 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$

1. Sous quelle forme est donné la fonction g ?
2. La fonction g admet-elle un maximum ? un minimum ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 1$
4. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentant g.
5. L'équation $g(x) = -3$ admet-elle des solutions ?

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3(x-5)^2 + 2$

1. Sous quelle forme est donnée la fonction f ?
2. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
3. Trouver les coordonnées du sommet de la parabole représentant f.
4. Écrire f sous forme développée ?
5. f peut-elle être écrite sous forme factorisée ?

Exercice 5 : Un viaduc ferroviaire est soutenu par une arche parabolique. Les deux piliers sur lesquelles sont posés l'arche sont distants de 165m, et le sommet de l'arche est situé 57m plus haut que chacun des pilier.

On veut calculer la hauteur h séparant l'arche du rail au niveau des deux piliers métalliques intermédiaires, situés à 49m et 116m de l'entrée gauche du pont.

1. Modéliser le problème. On appellera f la fonction dont la représentation graphique modélise le viaduc.
2. Justifier que f est définie sur $I = [0; 165]$ et $f(x) = a(x - 82,5)^2 + 57$, avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Quel est le signe de a ? Justifier que $a = -0,0084$.
4. En déduire l'image de $f(49)$, puis conclure.

Tableau récapitulatif

	Forme	Utilité	Exemple
1	Développée $f(x) = ax^2 + bx + c$	– f(0) = c – allure de f (si $a > 0$ d'abord décroissante puis croissante; si $a < 0$, d'abord croissante puis décroissante) – Sommet $S(x_S; y_S)$: abscisse en $x_S = -\frac{b}{2a}$ et ordonnée en $y_S = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ – Grâce à l'allure et le sommet : tableau de variation.	$f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ $a = 5$; $b = 3$ et $c = -2$ $f(0) = -2$ Sommet S : abscisse $x_S = -\frac{3}{2\times 5} = -\frac{3}{10}$ et ordonnée $y_S = f(-\frac{3}{10}) = \dots$
2	Canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$	– Allure de f selon le signe de a. – Sommet : abscisse en α, ordonnée en β. En particulier, le maximum (ou minimum) de f est β – Résoudre $f(x) = 0$ (mais plus simple sous forme factorisée).	$f(x) = 3(x-8)^2 - 2$ $a = 3$; $\alpha = 8$ et $\beta = -2$
3	Forme factorisée $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ **N'existe pas toujours**	– Résoudre $f(x) = 0$ (et $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$) – Le sommet : abscisse en $\frac{x_1+x_2}{2}$ et ordonnée en $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ – Allure de f selon le signe de a.	$f(x) = 2(x-3)(x+1)$ $a = 2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$ (attention ici les erreurs de signe sont fréquentes)

Remarque Forme canonique et développée existe toujours. Forme factorisée existe uniquement dans le cas où $f(x) = 0$ (c'est à dire la parabole $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisse (Ox), en deux points d'abscisse x_1 et x_2).