F6 - Fiche d'exo 17 - Fonction carré - 10 Avril 2017

1 Fonction carré

Solution: Exercices 1

1. Non, la fonction carré est décroissante sur [-2 ;0], puis croissante sur [0 ;3].
2. Même réponse, non.

Solution: Exercices 2

1. $3,06 < 3,52$, et la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, donc $3,06^2 < 3,52^2$
2. $4 > \pi$ et la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, donc $4^2 > \pi^2$
3. $-0,15 > -0,152$, et la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, donc on change le sens de l'inégalité, et on a : $(-0,15)^2 > (-0,152)^2$

Solution: Exercices 3

1. On sait que $(-0,3)^2 = 0,3^2$. Les nombres sont positifs, et la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, donc :

$$(10^{-1})^2 < 0,2^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 0,3^2$$

Solution: Exercices 4

1. $(-\sqrt{6})^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$
2. $(1-\sqrt{3})^2 = 1-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 1-2\sqrt{3}+3 = 4-2\sqrt{3}$
3. $(10^{-3})^2 = 10^{-3\times 2} = 10^{-6}$
4. $\left(\frac{11}{17}\right)^2 = \frac{11^2}{17^2} = \frac{121}{289}$

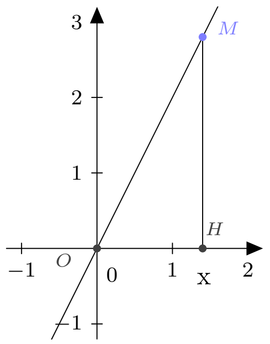
Solution: Exercice 5

a) Tous les nombres réels compris entre 3 et 4 ont leur carré compris entre 9 et 16.

b) Tous les nombres réels compris entre -4 et -3 ont leur carré compris entre 9 et 16.

c) Si $-1 \leq x \leq 2$, alors $1 \leq x^2 \leq 4$

Solution: Exercice 6

1. 

2. (a) Lorsque $x > 0$, l'aire de AMH vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2}OH \times HM = \frac{1}{2}x \times 2x = x^2$
   (b) Lorsque $x < 0$, il faut faire attention car $OH = -x$ et $HM = -2x$ (les longueurs sont positives). Par contre l'aire ne change pas. En effet, on a bien $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(-x) \times (-2x) = (-x)^2 = x^2$
3. Cette courbe est une parabole de centre O.

Solution: Exercice 7 On note x la longueur du côté du carré intérieur. Le carré extérieur a pour côté 1 (comme dit dans l'énoncé).

Le carré intérieur a pour aire x^2. La bande hachurée a pour aire $1-x^2$ (aire du carré extérieur moins l'aire du carré intérieur).

Donc le carré intérieur a la même aire que la bande hachurée si et seulement si : $x^2 = 1-x^2$. Cela donne $2x^2 = 1$. Les solutions de cette équation sont $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ici, x désigne la longueur d'un côté, donc x est positif. On exclut dont la solutions négative $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Conclusion : la longueur du carré intérieur doit être de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a bien une seule solution possible.

Solution: Exercice 8 Effectivement $x+1 \geq x$. Par contre cela ne veut pas dire que $(x+1)^2 \geq x^2$.

En effet, en règle générale, on ne peut pas mettre au carré une inéquation ! Si on a $a < b$ avec les deux nombres a et b positifs, on a bien $a^2 < b^2$. Mais si $a < b$ avec les deux nombres négatifs, on a $a^2 > b^2$. En revanche, si l'un des deux nombres est positifs et l'autre négatif, on ne peut pas conclure (pour s'en convaincre, prendre par exemple $-4 < 3$ et $-3 < 2$ et mettre au carré).

2 Fonction polynôme de degré 2

Solution: Exercice 9

1.
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2x+1-x^2 \\ &= 2x+1 \end{aligned}$$
Donc f est une fonction affine, et non un polynôme de degré 2.

2.
$$\begin{aligned} f(x) &= (2x)^2+2\times 2x+1-2x^2 \\ &= 4x^2+4x+1-2x^2 \\ &= 2x^2+4x+1 \end{aligned}$$
Donc f est un polynôme de degré 2.

3.
$$\begin{aligned} (2x+1)^3 &= (2x+1)(2x+1)^2 \\ &= (2x+1)(4x^2+4x+1) \\ &= 2x(4x^2+4x+1)+4x^2+4x+1 \\ &= 8x^3+8x^2+8x+4x^2+4x+1 \\ &= 8x^3+12x^2+12x+1 \end{aligned}$$
Donc ici f est un polynôme de degré 3 (et non de degré 2).

Solution: Exercice 10

1.
$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)^2-4^2 \\ &= (x+1-4)(x+1+4) \\ &= (x-3)(x+5) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} h(x) &= (3x)^2-2\times 3x\times 4x+4^2 \\ &= (3x-4)^2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} i(x) &= (2x)^2-7^2 \\ &= (2x-7)(2x+7) \end{aligned}$$

Solution: Exercice 11

1.
$$\begin{aligned} (x-3)^2=1 &\iff x-3=1 \text{ ou } x-3=-1 && (1) \\ &\iff x=4 \text{ ou } x=2 && (2) \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S=\{2;4\}$.

2.
$$\begin{aligned} (1-2x)^2\geq 9 &\iff (1-2x)^2-9\geq 0 && (3) \\ &\iff (1-2x)^2-3^2\geq 0 && (4) \\ &\iff (1-2x-3)(1-2x+3)\geq 0 && (5) \\ &\iff (-2x-2)(-2x+4)\geq 0 && (6) \end{aligned}$$
On résout alors l'équation en dressant le tableau de signe de $f: x\mapsto(-2x-2)(-2x+4)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-2x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geq 0$ est $S=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$.

Solution: Exercice 12

1. On développe pour se rendre compte que f et g sont bien des polynômes du second degré.

2.
$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff x-4=0 \text{ ou } x-3=0 \\ &\iff x=4 \text{ ou } x=3 \end{aligned}$$

5. On commence par résoudre $f(x)=g(x)$.
$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff (x-4)(x-3)=0,5x(x-4) \\ &\iff (x-4)\big((x-3)-0,5x\big)=0 \\ &\iff (x-4)(0,5x-3)=0 \\ &\iff x-4=0 \text{ ou } 0,5x-3=0 \\ &\iff x=4 \text{ ou } x=6 \end{aligned}$$

Solution: Exercice 13

1. Je ne sais pas. Le tableau ne nous donne pas la valeur de $f(10)$. On nous donne uniquement $f(1)$, $f(7,5)$ et $f(12)$.
2. Faux. f est d'abord croissante, puis décroissante, donc le coefficient devant x^2 est négatif.
3. Faux. En effet, le maximum de f est atteint en 7,5 et vaut $f(7,5) = 48,25$.
4. Cela dépend. Si $b \leq 11$, alors effectivement $f(x) = 11$ admet deux solutions (une solution dans [1 ;7,5] et une autre dans [7,5 ;12]). Par contre, si $b > 11$, alors $f(x) = 11$ admet une seule solution (elle est dans $[7,5;12]$).
5. Je ne sais pas. Le tableau ne nous donne pas la valeur de $f(3)$ (cf question 1).
6. Cela dépend. Si $b > 5$, alors effectivement l'inéquation $f(x) \leq 5$ n'admet pas de solution. Si $b \leq 5$, alors l'inéquation admettra des solutions.
7. Je ne peux pas savoir.
8. Cela dépend. C'est vrai si $b \geq 0$, faux sinon.

Remarque : En fait, $f(x) = -x^2 + 15x - 8$ (on peut trouver cet expression uniquement avec le tableau de variation, mais c'est un peu pénible). Donc $b = f(1) = -1 + 15 - 8 = 6$, donc on pouvait conclure sur la plupart des questions.

Solution: Exercice 14

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 3x \times 4 - 15x - 15 \times 4 && (7)\\ &= 3x^2 + 12x - 15x - 60 && (8)\\ &= 3x^2 - 3x - 60 && (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(x-0,5)^2 - 60,75 &= 3(x^2 - 2 \times x \times (0,5) + (0,5)^2) - 60,75 && (10)\\ &= 3(x^2 - x + 0,25) - 60,75 && (11)\\ &= 3x^2 - 3x + 0,75 - 60,75 && (12)\\ &= 3x^2 - 3x - 60 && (13)\\ &= f(x) && (14) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} f(x) = -60 &\iff 3x^2 - 3x - 60 = -60 && (15)\\ &\iff 3x^2 - 3x = 0 && (16)\\ &\iff x^2 - x = 0 && (17)\\ &\iff x(x-1) = 0 && (18)\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 && (19) \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) \leq 0 \iff (3x-15)(x+4) \leq 0 \qquad (20)$$

On sait résoudre cette inéquation en dressant le tableau de signe de $f(x) = (3x-15)(x+4)$.

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$3x-15$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de $f(x) \leq 0$ est $S = [-4;5]$

(c)

$$\begin{aligned} &3(x-0,5)^2 - 60,75 = -60,75 && (21)\\ \iff &3(x-0,5)^2 = 0 && (22)\\ \iff &(x-0,5)^2 = 0 && (23)\\ \iff &(x-0,5) = 0 && (24)\\ \iff &x = 0,5 && (25) \end{aligned}$$

Solution: Exercice 15 Soit n un nombre entier naturel tel que $(n+1)^2 - n^2 = 31$. En développant puis simplifiant, l'équation devient $2n+1 = 31$, donc $n = 15$ est le seul entier qui convienne.

Solution: Exercice 16

1. $C(0) = 30$
2. $C(4) = 110$
3. La fonction C(x) est une fonction polynomiale du second degré. Elle atteint son maximum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2\times(-2)} = 7$. Donc le coût maximum est de $C(7) = 128$€.