

1 Fonctions linéaire et affines

Exercice 1 : Tracer les courbes représentatives des fonctions : $f : x \mapsto 2x + 1$; $g : x \mapsto -3x + 2$; $h : x \mapsto 0x + 2$.

Pour chacune de ces fonctions, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, ainsi que les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe. Enfin, tracer les tableaux de signe.

Proof. Voir la figure ci-contre pour les courbes. Pour tracer les courbes, deux méthodes :

1. Soit on calcule les coordonnées de 2 points appartenant à la courbe. (Vu qu'on sait que la courbe doit être une droite, donc 2 points suffisent). Par exemple, on calcule $f(0)$ et $f(1)$; on sait alors que les deux points $M(0;f(0))$ et $N(A;f(1))$; la droite recherchée est la droite (MN).
2. Soit on utilise un point et le coefficient directeur. On part du point $M(0;f(0))$ qui est sur la droite. Puis on se décale de 1 carreau et on monte de a carreau ($a =$ coefficient directeur); on a un deuxième point N qui appartient à la droite; puis on trace la droite (MN).

□

Exercice 2 : Déterminer les expressions algébriques des fonctions affines f , g et h dont les courbes représentatives sont tracées ci-contre. Que remarque-t-on (géométriquement) pour les droites représentant les fonctions g et h ? Sous quelle condition cela peut-il se produire?

Proof. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x + 3$ et $h(x) = 3x$

Pour déterminer efficacement les expressions (qui sont du type $ax + b$ car on a à faire à droites, ie des fonctions affines), on regarde en quelle point la droite coupe l'axe des ordonnées (axe Oy, vertical) : cela donne l'ordonnée à l'origine (coefficient b). Puis on détermine a graphiquement : on part d'un point de la courbe, on se décale de 1 carreau vers la droite, et on regarde de combien on doit monter ou descendre pour retrouver la courbe; cela donne le coefficient directeur a (positif si on monte, négatif si on doit descendre).

Les courbes représentant les fonctions g et h sont des droites parallèles. Cela se produit lorsque deux fonctions affines ont même coefficient directeur (3 ici). □

Exercice 3 : (*) Déterminer l'expression algébrique des fonctions affines f et g sachant que :

- 1/ Le coefficient directeur de la droite représentant f est 2 et le point $M(1;6)$ appartient à \mathcal{C}_f .
- 2/ L'ordonnée à l'origine de la droite représentant g est 4 et le point $N(1;2)$ appartient à la droite.

Proof. f et g sont des fonctions affines, donc de la forme $f(x) = ax + b$ et $g(x) = mx + p$ avec a, b, m, p des coefficients réels.

- 1/ Coefficient directeur de f est 2 donc $a = 2$.
- 2/ L'ordonnée à l'origine de g est 4, donc $p = 4$.

$$M(1;6) \in \mathcal{C}_f \iff f(1) = 6 \quad (1)$$

$$\iff a \times 1 + b = 6 \quad (2)$$

$$\iff 2 + b = 6 \quad (\text{car } a=2). \quad (3)$$

$$\iff b = 4 \quad (4)$$

$$N(1;2) \in \mathcal{C}_g \iff g(1) = 2 \quad (5)$$

$$\iff m \times 1 + p = 2 \quad (6)$$

$$\iff m + 4 = 2 \quad \text{car } p=4 \quad (7)$$

$$m = -2 \quad (8)$$

Donc $f(x) = 2x + 4$.

Donc $g(x) = -2x + 4$.

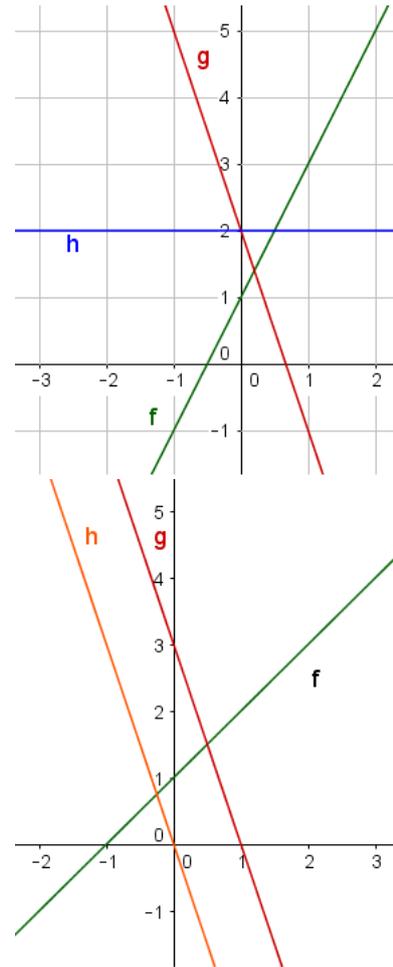
□

Exercice 4 : (Vrai/Faux)

- 1) Une fonction affine est une fonction linéaire. FAUX
- 2) Une fonction linéaire est une fonction affine. VRAI
- 3) Une fonction constante est une fonction affine. VRAI
- 4) Une fonction affine est une fonction constante. FAUX

Exercice 5 : (Vrai/Faux) On considère la fonction $f : x \mapsto x - 2$.

- 1/ f est une fonction linéaire. FAUX car ordonnée à l'origine $= -2 \neq 0$.
- 2/ f est décroissante. FAUX (coefficient directeur est positif, donc f est croissante sur \mathbb{R} .)
- 3/ La courbe représentative de f passe par le point $A(5;3)$.
(On a $f(5) = 3$, et on sait que le point $(5; f(5))$ est sur \mathcal{C}_f , donc VRAI.)
- 4/ La courbe représentative de f passe par le point $B(0;-2)$. (on a $f(0) = -2$, donc VRAI)
- 5/ La courbe représentative de f passe par le point $C(4;1)$. (On a $f(4) = 2 \neq 1$, donc $C(4;1)$ n'appartient pas à \mathcal{C}_f ; FAUX)
- 6/ La courbe représentative de f est la droite (AB). (La courbe représentative de f est une droite; et cette droite passe par les points A et B (questions 3 et 4): c'est donc exactement la droite (AB). VRAI.)



Exercice 6 : Les algorithmes suivants correspondent-ils au calcul de l'image de x par une fonction affine ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Algo 1
Input X
$2X \rightarrow A$
$6X \rightarrow B$
$A+B+8 \rightarrow C$
Disp C

Algo 3
Input X
$X^2 \rightarrow A$
$(X-1)(X+1) \rightarrow B$
$A-B+2X \rightarrow C$
Disp C

Algo 2
Input X
$X-3 \rightarrow A$
$A^2 \rightarrow B$
$2B+1 \rightarrow C$
Disp C

Algo 4
Input X
$X-4 \rightarrow A$
$2X \rightarrow B$
$A \times B \rightarrow C$
Disp C

Proof. Chaque algorithme code une fonction. On entre X en *input*, et l'algorithme renvoie C en sortie ("*Disp*"). Il s'agit donc de trouver l'expression de C en fonction de X , et voir si cette expression est une fonction affine (de la forme $aX + b$) ou non.

Algo 1

$$2X + 6X + 8 \\ = 8X + 8$$

Affine.

Coefficient directeur = 8.

Ordonnée à l'origine = 8.

Algo 2

$$X^2 - (X-1)(X+1) + 2X \\ = X^2 - (X^2 - 1) + 2X \\ = 2X + 1$$

Affine.

coefficient directeur = 2.

Ordonnée à l'origine = 1.

Algo 3

$$2(X-3)^2 + 1 \\ = 2(X^2 - 6X + 9) + 1 \\ = 2X^2 - 12X + 19$$

Pas affine.

Algo 4

$$(X-4) \times 2X \\ = 2X^2 - 8$$

Pas affine.

□

2 Fonctions linéaires et pourcentages

Exercice 7 : Montrer qu'augmenter une quantité Q de 20% revient à la multiplier par 1,2, c'est à dire calculer l'image de Q par la fonction $f : x \mapsto 1,2x$.

Compléter alors le tableau suivant :

Évolution en pourcentage	Image par la fonction
Augmenter x de 20%	$f(x)=1,2x$
Augmenter x de 27%	$f(x)=1,27x$
Diminuer x de 10%	$f(x)=0,9x$
Augmenter de 5%	$f(x)=1,05x$
Diminuer de 90%	$f(x) = 0,1x$
Augmenter x de 100%	$f(x)=2x$

Proof. On considère une valeur x . Calculer 20% de x revient à calculer $\frac{20}{100}x = 0,2x$.

Ainsi, augmenter x de 20% revient à calculer

$$x + \frac{20}{100}x = \left(1 + \frac{20}{100}\right)x = 1,2x$$

Si on devait augmenter x de $M\%$, on aurait calculé :

$$\left(1 + \frac{M}{100}\right)x$$

Enfin, si on diminue x de $M\%$, on doit calculer :

$$\left(1 - \frac{M}{100}\right)x$$

On peut alors compléter le tableau. □

3 Inéquations

Exercice 9 : Il y avait un oubli dans l'énoncé. La production des 1000 litres coûte 4000€. Donc le bénéfice de l'usine est de $f(x) = 6x - 4000$ ($6x$ = bénéfice du à la vente de x litres de produit; mais -4000 car coûts fixes de 4000€).

2)

$$f(x) < 0 \iff 6x - 4000 < 0 \tag{9}$$

$$\iff x < \frac{4000}{6} \tag{10}$$

$$\iff x < \frac{2000}{3} \approx 666,67 \tag{11}$$

3) Si l'usine vend moins de $\frac{2000}{3}$ litres de produit, alors elle va perdre de l'argent. Pour être rentable, elle doit vendre plus de $\frac{2000}{3}$ litres.

Exercice 8 : On a relevé les données suivantes sur le cours de l'action Apple (en \$) :

1er juillet 2016 : 95,89 \$

du 1er juillet au 1er août 2016 : +10,6%

du 1er août au 1er septembre : +0,6%

du 1er septembre au 3 octobre : +5,4%

du 3 octobre au 1er novembre : -0,9%

du 1er novembre au 1 décembre : -1,79%

1) Calculer le prix de l'action Apple le 1er décembre 2016.

2) Calculer le pourcentage d'augmentation entre le 1er juillet et le 1er décembre. Ce pourcentage est-il égal à la somme des pourcentages ?

Proof. 1) Au premier décembre 2006, l'action Apple valait :

$$95,89 \left(1 + \frac{10,6}{100}\right) \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) \left(1 + \frac{5,4}{100}\right) \left(1 - \frac{0,9}{100}\right) \left(1 - \frac{1,79}{100}\right) \\ = 109,45\$$$

2) L'action Apple a augmentée de $\frac{-95,89}{95,89} \times 100 = 14,14\%$.

On utilise la formule $\frac{\text{nouveau prix} - \text{ancien prix}}{\text{ancien prix}}$, et on multiplie pas 100 pour mettre en pourcentages.

Si on avait fait bêtement la somme des pourcentages, on aurait obtenu $10,6 + 0,6 + 5,4 - 0,9 - 1,79 = 13,91\%$. Ce résultat aurait été faux. □