Feuille d'exercices 3

Chapitre F1

Seconde A - 12 septembre

Exercice Un mathématicien se rend au restaurant. Vers la fin du repas, le serveur lui annonce qu'avec le menu qu'il a choisi, le mathématicien a le droit à un fromage ou un dessert. Le mathématicien commande les deux (un fromage et un dessert). Est-il en tort ?

Mettre cet exercice en relation avec la définition de $A \cup B$.

Proof. Dans $A \cup B$ veut dire être dans A ou dans B.

Le problème du ou, c'est que dans le language courant il a tendance à être exclusif (fromage ou dessert, c'est l'un ou l'autre, pas les deux). En maths, le ou est toujours inclusif, et correspond plus au et/ou de la langue française. □

Exercice Vrai / Faux On note A et B deux ensembles. On a :

1) $A \cap B \subset A$

2) $A \cup B \subset A$

3) $B \subset A \cup B$

De plus , supposons maintenant que $A \subset B$.

4) $A \cup B = B$

5) $A \cap B = A$

Proof. De manière générale, faire des dessins en patate.

1) Vrai. Ce qui est à la fois dans A et dans B est aussi dans A.

2) Pas forcément. Voir 4 pour un cas où c'est vrai. Mais en général, c'est faux. Par exemple A={garcons de la seconde A} et B={ filles de la secondes A } alors $A \cup B$={ élèves (garçons filles) de la secondes A }

3) Oui. Car B est dans A ou B.

4) Oui. Comme A est dans B, alors l'union de A avec B donne B (tous les éléments de A sont dans B, donc faire l'union ne fait rien).

5) Oui. A est contenu dans B, donc les éléments à la fois dans A et dans B sont en fait dans A.

□

Exercice On range 461 pots de yaourt dans des caisses identiques. La règle est qu'on ne commence pas une caisse avant d'avoir fini la précédente. A la fin, on a rangé les pots dans 14 caisses. Combien de pots contiennent les caisses pleine ? Combien de pots y a t il dans la dernière caisse ?

Proof. $461 = 13 \times 35 + 13$. Donc 13 caisses avec 35 pots et une caisse restante avec 6 pots $\square$

Exercice Développer : $A = (3x-4)^2 = \dots$
$B = (\frac{x}{2} - 3)(\frac{x}{2} + 3) = \dots$

Proof.

$$\begin{aligned} A &= (3x-4)^2 && (1)\\ &= (3x)^2 - 2(3x) \times 4 + 4^2 && (2)\\ &= 9x^2 - 24x + 16 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (\frac{x}{2} - 3)(\frac{x}{2} + 3) && (4)\\ &= (\frac{x}{2})^2 - 3^2 && (5)\\ &= \frac{x^2}{4} - 9 && (6) \end{aligned}$$

$\square$

Exercice (*) (Allons au delà des "3 identités remarquables"). Développer (éventuellement avec une preuve géométrique)
$(a+b)^2 = \dots$
$(a+b+c)^2 = \dots$
$(a+b+c+d)^2 = \dots$
Sans calculs, intuiter $(a+b+c+d+e)^2 = \dots$

Proof. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\square$

Exercice (*) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, avec $x \neq y$. Par exemple, supposons $x < y$ (cela a-t-il une importance ?). Montrer alors qu'il existe $z \in \mathbb{Q}$ tel que $x < z < y$.
(Étudier d'abord la situation $x < 0$, $y > 0$, puis des exemples simples où $x, y > 0$).

Proof. Si $x < 0, y > 0$ alors z=0 convient.
Si $x, y > 0$ alors $z = \frac{a+b}{2}$ $\square$

Exercice (**) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (dur sans indications).

Proof. $\square$