Fonction inverse

1 Fonction inverse

1.1 Définition, variation

Définition 1. *La fonction inverse est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*
Son ensemble de définition est l'ensemble des réels non nuls, c'est à dire $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Proposition 1.1. *La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.*

Tracer son tableau de variation.

Proof. Soient a et b deux réels non nuls tels que $a < b$.
Étudions le signe de $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$

$\boxed{a < b < 0}$	$\boxed{0 < a < b}$
Si $a < b < 0$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$	Si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$
Ainsi, pour tous réels a et b strictement négatifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.	Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.	La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

□

1.2 Courbe représentative

Définition 2. *La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.*

Tracer la courbe.

REMARQUE

Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\,(a; f(a))$ et $M'\,(-a; f(-a))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
- On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$, et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.

On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

Exercice 1 : Résoudre graphiquement :

1. $\frac{1}{x} = 1$
2. $\frac{1}{x} > 2$
3. $\frac{1}{x} \leq 0,5$
4. $\frac{1}{x} < -2$
5. $\frac{1}{x} > -1$

2 Fonction homographique

2.1 Définition

Définition 3. *On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, $c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$*

REMARQUE

La condition $ad - bc \neq 0$ traduit le fait que $ax + b$ et $cx + d$ ne sont pas pas proportionnels.
Montrons que si $c \neq 0$ et $ad - bc = 0$ alors le quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est constant. En effet

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{cax+bc}{c\,(cx+d)} = \frac{cax+ad}{c\,(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

2.2 Ensemble de définition

Définition 4. *Une fonction homographique est définie pour tout réel x tel que le dénominateur $cx+d$ ne s'annule pas.*

La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c};+\infty;\right[$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3-2x}$

f est définie pour tout réel x tel que $3-2x \neq 0$ soit $x \neq \dfrac{3}{2}$. L'ensemble de définition de la fonction f est $D = \left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2};+\infty;\right[$ que l'on note aussi $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

2.3 Propriété (*)

Proposition 2.1. *Toute fonction homographique peut se mettre sous la forme réduite $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$.*

Preuve 2.2. *Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$)*

- *Si $a = 0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$, $\dfrac{b}{cx+d} = \dfrac{b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \dfrac{\frac{b}{c}}{x+\dfrac{d}{c}}$*
- *Si $a \neq 0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$,*

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \times \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{\left(x+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2x-11}{3x+6}$
Pour tout réel $x \neq -2$,

$$\frac{2x-11}{3x+6} = \frac{2}{3} \times \frac{x-\frac{11}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} \times \frac{(x+2)-\frac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}\times\frac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{5}{x+2}$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$

Exercice 2 : *Pour tout $x \neq -3$, on a : $\frac{3x+2}{x+3} = 1 + \frac{2x-1}{x+3}$*

Exercice 3 : *Montrer que pour tout x différent de 1, on a: $3 + \frac{2}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}$ et $\frac{5}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1} - 2$*
Pourquoi a-t-on exclut le cas $x = 1$?

2.4 Variations (*)

La forme réduite $f\colon x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$ d'une fonction homographique permet de déduire les variations de la fonction f à partir des variations de la fonction inverse.

EXEMPLE

Étudions les variations de la fonction homographique f définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$.
Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;-2[$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} a < b < -2 &\iff a+2 < b+2 < 0 \\ &\iff \frac{1}{b+2} > \frac{1}{a+2} < 0 \\ &\iff 0 < \frac{-5}{a+2} < \frac{-5}{b+2} \\ &\iff \frac{2}{3} < \frac{2}{3} - \frac{5}{a+2} < \frac{2}{3} - \frac{5}{b+2} \end{aligned}$$

Ainsi, si $a < b < -2$ alors $f(a) < f(b)$ donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$
On montre de même que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-2;-\infty[$.
D'où le tableau des variations de la fonction f :