F4 - Calcul algébrique

1 Manipulations algébriques élémentaires; transformations d'écritures

1.1 Développer, factoriser des expressions

Définition 1. *Développer une expression, c'est la transformer en une somme de termes.*
Factoriser une expression, c'est la transformer en un produit de facteurs.

En fonction de la situation, on utilisera la forme développée ou factorisée. Il faut donc savoir passer de l'une à l'autre.

Proposition 1.1. *Soient a, b et c trois nombres réels.*

	Forme factorisée		*Forme développée*
Distributivité	*a(b+c)*	=	*ab + ac*
	(a+b)(c+d)	=	*ac + ad + bc + bd*
Identités remarquable	$(a+b)^2$	=	$a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2$	=	$a^2-2ab+b^2$
	(a-b)(a+b)	=	a^2-b^2
Factorisation	$a\left(b+c+d+e\right)$	=	*a (b+c) + a(d+e)*

Exercice 1 : Factoriser x^2-6x+9. Développer $(x-2)^2$

On peut aussi **simplifier** un calcul. Par exemple, $(x-1)^2-x^2=-2x+1$ (ici permet de se ramener à une fonction affine); ou $2x+7x=9x$ (on simplifie dans le sens ou il y a moins de terme : on les regroupe).

1.2 Signe d'un produit, signe d'un quotient

Proposition 1.2. *Soient a et b deux nombres réels. On s'intéresse au signe du produit ab.*

- *Si a et b sont positifs, alors ab l'est aussi.*
- *Si a et b sont négatifs, alors ab est positif.*
- *Si l'un des deux est positif et l'autre négatif, alors ab est négatif.*

Exercice 2 : Tracer les tableaux de signes de $(x-1)$ et de $(x+2)$ En déduire le tableau de signe de $(x-1)(x+2)$.
Peut-on maintenant facilement résoudre $(x-1)(x+2)\geq 0$?
Sans les tableaux de signe, comment aurait-on pu procéder ?

2 Résolutions d'équations

2.1 Définitions

Définition 2. *Une équation d'inconnue x est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu x. Résoudre une telle équation, c'est déterminer toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.*
Deux équations sont dites équivalentes si elles ont les mêmes solutions. On utilise alors le symbole $\iff$ *, qui se lit "équivalent à" ou "si et seulement si" (abrégé : ssi).*

Exemple $x-4=0$ et $x=4$ sont équivalentes, on peut noter $x-4=0 \iff x=4$; en revanche $x=1$ et $x^2=1$ ne sont pas équivalentes.

Remarque Parfois, on précise "résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{N},\mathbb{Q}$, etc) l'équation ..."; cela veut dire que l'on ne veut que les solutions réelles (ou entières, ou rationnelles, etc).
Ainsi, l'équation $2x=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$; par contre dans $\mathbb{R}$, l'unique solution est $\frac{1}{2}$.

Proposition 2.1. *Les manipulations algébriques suivantes transforment une équation en une équation équivalente :*

- *Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation*
- *Multiplier ou diviser par un même nombre NON NUL les deux membres de l'équation*
- *Développer, factoriser, réduire un des deux membres de l'équation*

Exemple $2x-4=0 \iff x-2=0 \iff x=2$

Exercice 3 : Les équations suivantes sont-elles équivalentes ?
a) $3x+5=0$ et $3x=5$
b) $x^2=4$ et $x=2$
c) (x+1)(x+2)=(x+1)(x+3) et x+1=0
d) $x^2+6x+9=0$ et $(x+3)^2=0$
e) $x=2$ et $x^2=4$

2.2 Méthodes générales pour résoudre des équations

	Type d'équation	Méthode à utiliser	Exemple
1	Équation du premier degré $ax + b = c$	- On place l'ensemble des termes en x dans un membre, et les constantes dans un autre - On conclut	$2x + 3 = 0$
2	Équation de la forme $x^2 = a$	- Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solutions (dans $\mathbb{R}$). - Si $a = 0$, 0 est unique solution. - Si $a > 0$, cette équation admet 2 solutions : $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.	$x^2 = -2$ $x^2 = 0$ $x^2 = 2$
3	Équation produit : $f(x)g(x) = 0$	$f(x)g(x) = 0 \iff f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ - En pratique, on résout séparément $f(x) = 0$ (solutions S_1) et $g(x) = 0$ (solutions S_2) - Les solutions de $f(x)g(x) = 0$ sont alors $S_1 \cup S_2$	$(x - 1)(x + 2) = 0$
4	Équation se ramenant à une équation produit après factorisation	- On transpose tous les termes dans un même membre - On factorise l'expression - On résout l'équation produit	$(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3) = 0$
5	Équation quotient	- On recherche les contraintes - On transpose tous les membres d'un même côté, on met au même dénominateur et on factorise si nécessaire - On conclut en faisant attention aux contraintes.	$\frac{2x+1}{x-3} = 0$

Exercice 4 : Résoudre les équations exemple du tableau ci-dessus.

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1)\ 5x^2 + 25 = 0; \quad (E_2)\ 2x^2 - 72 = 0 \quad (E_3)(x+3)(x-5) = 0; \quad (E_4)(2x+1) = (2x+1)(x+3) \quad (E_5)\ \frac{2x+4}{x+1} = 0$$

Proof. (E_1) et (E_2) sont deux équations carré, du type 2. (E_3) est une équation produit (type 3). (E_4) est une équation de type 4 (on factorise pour se ramener à une équation produit). (E_5) est une équation quotient (type 5). □

2.3 D'autres méthodes de résolution

2.3.1 Résolution graphique

cf chapitre précédent (F3)

2.3.2 Résolution approchée

Méthode de la dichotomie, etc...

3 Résolution d'inéquations

Définition 3. *On dit que deux inéquations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.*

Proposition 3.1. *Les manipulations algébriques suivantes transforment une inéquation en une inéquation équivalente :*

- *Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'inéquation*
- *Multiplier ou diviser par un même nombre POSITIF NON NUL les deux membres de l'inéquation*
- *Développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'inéquation*
- *Multiplier ou diviser par un même nombre **négatif**, non nul, les deux membres d'une inéquation, dont **le sens est alors modifié***

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $2x + 5 < 0; \quad -3x + 7 < 2$

3.1 Inéquation produit

Une inéquation produit est une inéquation du type $f(x)g(x) > 0$ (le signe $>$ peut être remplacer par $<$, $\leq$ ou $\geq$).

Pour résoudre une telle inéquation, on étudie le signe du produit $f(x)g(x)$; pour ce faire, on étudie séparément les signes de $f(x)$ et $g(x)$ puis on applique la règles des signes d'un produit.

Exemple Résoudre $(x - 3)(2x + 4) \leq 0$ et $(2x - 1)^2 \geq (2x - 1)(5x + 2)$.

3.2 Inéquation quotient

C'est une inéquation du type $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.

Pour la résoudre, on étudie les signes du numérateur et du dénominateur, et on applique la règle des signes à l'aide d'un tableau de signe. On utilise le principe suivant : le produit et le quotient de deux nombres non nuls sont de mêmes signes. Autrement dit, les règles des signes pour le quotient sont les mêmes que celles pour le produit.

Exercice 7 : Résoudre $\frac{x+4}{-x+2} \leq 0$

Langage des fonctions	Language algébrique	Language graphique
Déterminer l'image de a par f	Calculer $f(a)$	Donner l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est a
Déterminer les antécédents par f d'un réel donné	Résoudre l'équation $f(x) = k$	Donner les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à k
Déterminer les réels de I dont l'image par f est inférieure (respectivement supérieure) à un réel k donné	Résoudre dans I l'équation $f(x) < k$ (resp. $f(x) > k$)	Donner les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est inférieure (resp. supérieure) à k