Généralités sur les fonctions

Maximilien Dreveton

September 14, 2016

1 Fonction

1.1 Ensemble de définition

Définition 1. *Soit D et A deux ensemble.*

*Alors on construit une fonction f qui va de D (ensemble de **D**épart) dans A (ensmeble d'**A**rrivée) : à chaque élément de D, on associe un élément de A.*

On note : $f : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

Exemple Soit $D := \{pomme, poire, voiture\}$ et $A := \{moto, maison, balcon\}$. On construit $f : D \to A$ tel que :

$$f(pomme) := moto$$

$$f(poire) := maison$$

$$f(voiture) := moto$$

Cet exemple ne sert bien évidement à rien, si ce n'est à illustrer la notion de fonction.

On remarque par ailleurs que balcon est un élément de l'ensemble de départ mais n'est pas atteint par la fonction f.

Exemple La fonction carré :

f : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est une fonction importante.

Exemple La fonction racine carré :

f : $\left| \begin{array}{ccc} [0, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ donne un exemple de fonction qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier !

Exemple Conversion degré Celsius en degré Fahrenheit

f : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ T_{Celsius} & & 1.8\ T_{Celsius} + 32 \ = \ T_{Fahrenheit} \end{array} \right.$

On peut inverser cette fonction pour convertir des degré Fahrenheit en degré Celsius :

f : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ T_{Fahrenheit} & & 1.8\ \frac{T-32}{1.8} \ = \ T_{Celsius} \end{array} \right.$

Ces deux dernières fonctions sont des fonctions affines.

Exemple La fonction inverse : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

On ne peut pas diviser par zéro : elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ privé de 0 (aussi noté $\mathbb{R}^*$)

Exercice Donner les ensembles de définitions des fonctions suivantes :
1) $f : x \mapsto \sqrt{x-4}$
2) $f : x \mapsto \frac{3}{3x-9}$
3) $f : x \mapsto x^3 + x - 7$

1.2 Représentation graphique

Dans un plan muni d'un repère, la courbe représentative C_f d'une fonction f est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x parcourt l'ensemble de définition de f.

Exercice Tracer sur le graphe de la fonction carré, la fonction racine carré et d'une fonction affine du type $x \mapsto ax + b$. Tracer la fonction $x \mapsto -x^2$.

1.3 Image, antécédents

Définition 2. *Si f(a)=b, on dit que b est* ***l'****image de a par f, et que a est* ***un*** *antécédent de b par f. (On prêtera attention aux mots en gras : différence entre le et un).*

Exemple Prenons la fonction carré $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors l'image de 2 par f est $f(2) = 2^2 = 4$. Mais 4 admet deux antécédents : $\sqrt{4} = 2$ et $-\sqrt{4} = -2$. Faire un schéma.

La lecture graphique aide grandement à la recherche des antécédents.

Remarque culturelle Fonctions injectives, surjectives, bijectives.

2 Notions de variations. Minimum, maximum

2.1 Décroissance, croissance

Explication heuristique

Définition 3. *Soit f une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclut dans l'ensemble de définition de f.*

1) On dit que la fonction f est croissante si pour tous les nombres $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.

2) On dit que la fonction f est décroissante si pour tous les nombres $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.

3) On dit que la fonction f est constante si pour tous les $x, y \in I$ on a $f(x) = f(y)$.

Définition 4. *1) On dit que la fonction f est strictement croissante si pour tous les nombres $x, y \in I$ tels que $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.*

2) On dit que la fonction f est décroissante si pour tous les nombres $x, y \in I$ tels que $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice Trouver les variation de la fonction carré $x \mapsto x^2$. (On pourra d'abord les intuiter à partir du graphe, puis le prouver).

2.2 Tableau de variation

Définition 5. *Étudier le sens de variation d'une fonction f, c'est chercher les plus grands intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante ou constante.*

On résume les propriétés dans un tableau de variation

Exemple Faire un exemple simple au tableau.

2.3 Minimum, maximum

Heuristique.

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

1) On dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$.

2) On dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(a)$.

Exercice Faire un exemple.

Remarque culturelle Si x est le maximum de f, alors x est le minimum de -f. (Éventuellement à faire en exo).

3 Résolution graphique d'équations

3.1 Résoudre f(x)=k

3.2 Comparer une fonction à une constante (résoudre $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$

3.3 Comparer deux fonctions f et g