Ensembles de nombres et intervalles

Maximilien Dreveton

August 27, 2016

1 Notion d'ensemble

1.1 Définition et opération sur les ensembles

Définition 1. *Un ensemble est un groupement de choses, la chose pouvant être des nombres, des fonctions, ou des objets mathématiques divers.*

Définition 2. *Soit A et B deux ensemble.*

On note $A \cup B$ l'union de A et B, c'est à dire l'ensemble contenant les éléments de A et de B.

On note $A \cap B$ l'intersection de A et B, cad l'ensemble des éléments appartenant ***à la fois*** *à A* ***et*** *à B.*

Exemple Soit A:={pomme, poire, voiture} et B:={voiture, moto, maison}.

Alors A ∪ B = {pomme, poire, voiture, moto, maison} et A ∩ B = {voiture}

Exemple Soit $A := \{ordinateur, telephone, imprimante\}$ et $B := \{voiture, moto, scooter\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$ (ensemble vide).

Définition 3. *Soit A et B deux ensembles. On dit que A est contenu dans B (ou bien B contient A), que l'on note $A \subset B$ si tous les éléments de A sont aussi dans B.*

Proposition 1.1. *Soit $A \subset B$. Alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$*

Remarque culturelle Soit E l'ensemble contenant tous les ensemble. E se contient-il ?

1.2 Quelques ensembles de nombres

Dans cette partie, on construit de manière informelle les ensembles classiques de nombre. Une construction plus rigoureuse est proposée en annexe.

Les nombres entiers On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entier naturel (ie les entiers positifs), et $\mathbb{Z}$ (de l'allemand Zahlen, nombre) celui des nombres entiers (positifs et négatif).

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \tag{1}$$

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots\} \tag{2}$$

Les nombres rationnels Ce sont tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$, avec a et b dans $\mathbb{Z}$. On les note $\mathbb{Q}$ (comme quotient). a est appelé numérateur, et b dénominateur.

Remarque : on s'interdit de diviser par 0. En effet, si $x = \frac{a}{0}$, alors $x \times 0 = a$ or on a toujours $x \times 0 = 0$ (en effet, $x \times (1+0) = x \times 1 + x \times 0$). On aurait donc $a = 0$, et donc n'importe quel x conviendrait, ce qui n'est pas satisfaisant.

Remarque culturelle Éventuellement, on peut définir $\frac{0}{0} := 1$, mais si on peut éviter de s'en servir c'est mieux.

Proposition 1.2.

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{3}$$

Proof. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a = \frac{a}{1}$. $\frac{a}{1}$ étant une fraction, on a bien $a \in \mathbb{Q}$. □

On rappelle que l'on a le droit de **simplifier** des fractions. Ainsi, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{6}$ représentent le même nombre. Néanmoins, $\frac{1}{2}$ est la forme la plus simple, que l'on appelle forme irréductible (on ne peut plus la simplifier !).

Proposition 1.3. *Notion de fraction irréductible.*

Tout rationnel x a une écriture unique sous la forme $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, avec a et b premiers entre eux.

Proof. On divise a et b par leur pgcd pour avoir l'écriture irréductible (ie on simplifie au maximum).

On admet l'unicité. □

Proposition 1.4.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\pi \notin \mathbb{Q} \text{ (admis)}$$

Proof. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\sqrt{2}$ comme une fraction, cad $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Quitte à réduire au plus petit dénominateur, on peut de plus supposer que a et b sont premier entre eux.

On élève au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2}$. Donc $2b^2 = a^2$. Donc a^2 est pair, donc a aussi (en effet, a et a^2 ont toujours la même parité ! En effet, si a est pair, a^2 l'est aussi, mais si a est impair, a^2 est impair!) □

Les nombres réels Ils sont noté $\mathbb{R}$. Ce sont tous les nombres que l'on connaît en seconde.

Remarque culturelle Cette définition n'est pas entièrement rigoureuse. Définir proprement $\mathbb{R}$ n'est pas si trivial. Une construction (parmi 3 ou 4 possibles) est abordée en annexe.

1.3 Les intervalles

On a vu que $\mathbb{R}$ contient tous les nombres que l'on connait. Supposons que l'on veuille construire l'ensemble des nombres compris entre 2 et 7. On note cet ensemble $[2, 7]$.

Si maintenant, on veut les nombres compris entre 2 et 7 avec 2 exclu mais 7 inclu, on note $]2, 7]$.

Maintenant, on veut exclure à la fois 2 et 7. On note $]2, 7[$.

Ici] ou [veut dire que l'on exclu la borne, alors qu'avec [ou] on l'inclut.

Ces notations prennent leur sens lorsque l'on représente un intervalle sur la droite graduée. (faire le schéma soit même).

Enfin, supposons que l'on veuille tous les nombres supérieur à 2, 2 inclus. On va noter $[2, +\infty[$. ∞ veut dire l'infini; on est à priori obligé de l'exclure, car ce n'est pas un nombre.

Remarque culturelle On peut néanmoins chercher à donner un sens à $[-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On parle alors de droite réelle achevée, que l'on note $\bar{\mathbb{R}}$. Néanmoins, la manipulation de ∞ reste délicate, et les opérations comme $\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$ sont à bannir.

2 (*) Annexe A : Une construction plus rigoureuse

"Dieu nous a donné les entiers, les mathématiciens ont fait le reste" (Kronecker)

Bien qu'intéressante, cette section dépasse largement le cadre du programme. On peut donc la sauter sans encombre.

2.1 Les entiers naturels $\mathbb{N}$

Ces nombres sont les plus naturels auquel on peut penser. Pour les construire, on se base sur les axiomes de Péano.

2.2 Les entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Avec les entiers naturels, on peut facilement faire les additions et multiplications. Par contre, les soustractions sont délicates.

En effet, on peut effectuer 3-1; le résultat est 2, qui est bien dans $\mathbb{N}$. Par contre, 3-4 n'existe pas dans $\mathbb{N}$.

"Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion [de nombre négatif]; par exemple -3 serait moindre que 2; cependant $(-3)^2$

serait plus grand que 2^2, c'est à dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité" (Lazare Carnot, 1803)

2.3 Les rationnels $\mathbb{Q}$

On a définit les rationnels comme l'ensemble des fractions. On va maintenant définir l'addition et la multiplication de rationnels.

Définition 4.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{4}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{5}$$

Expliquons ces choix.

On veut définir une multiplication qui soit associative et commutative, c'est à dire $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z = x \times y \times z$.

En posant $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, cela impose $b \times x = a; d \times y = c$ d'où $(b \times x) \times (d \times y) = a \times c$.

Pour l'addition, supposons que x et y aient même dénominateur : $x = \frac{a}{m}$ et $y = \frac{b}{m}$. Dans ce cas, on veut conserver la propriété de distributivité : $m(x + y) = mx + my$. Donc $x + y = \frac{a+c}{m}$. Si x et y ne sont pas au même dénominateur, on peut s'y ramener. En effet, $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ et $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$.

La proposition suivante résume les propriétés des rationnels.

Proposition 2.1. $\mathbb{Q}$ *muni de l'addition + et la multiplication x précédement constuite est un corps, c'est à dire :*

- l'addition est associative et commutative, elle a un élément neutre (ajouter 0 revient à ne rien faire), tout élément $\frac{a}{b}$ *admet un opposé* $\frac{-a}{b}$.

-la multiplication est associative et commutative, distributive par rapport à l'addition, elle admet un élément neutre (quand on multiplie par 1, il ne se passe rien), tout élément ***non nul*** $\frac{a}{b}$ *admet un inverse* $\frac{b}{a}$.

Conclusion Autrement dit, dans $\mathbb{Q}$, on a les 4 opérations : addition, soustraction, multiplication et division ! Donc $\mathbb{Q}$ serait-il le graal de tout mathématicien ?

Pour plusieurs raison, non. La plus simple étant que certains nombre qui existe vraiment ne peuvent pas s'exprimer sous forme de fractions. L'exemple le plus ancien étant $\sqrt{2}$. Ce nombre est bien réel : c'est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1cm.

3 (**) Annexe B : Les nombres réels $\mathbb{R}$

Leur construction rigoureuse est plus délicate.

La manière la plus naturelle possible est de considérer les développement décimaux (en base 10) illimités.

3.1 Les nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 5. *Un nombre décimal est un nombre rationnel admettant une écriture en fraction sous la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux. On a :*

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \tag{6}$$

Proposition 3.1. *La somme, la différence, le produit de deux décimaux est encore un nombre décimal. En revance, la division de deux décimaux n'est pas forcément un décimal (par exemple 1 divisé par 3).*

Proposition 3.2. *Un nombre décimal écrit en base 10 n'a qu'un nombre fini de chiffre après la virgule.*

Proof. $\frac{a}{10^n}$ n'a qu'au plus n chiffre après la virgule (exactement n si a n'est pas multiple de 10). □

3.2 Développement décimal illimité