DM 7 - Statistiques & Vecteurs - Théorèmes de Thalès et de Pappus

A rendre pour le jeudi 8 décembre

1 Statistiques (obligatoire)

Exercice 1 : 1) Donner une liste de 5 valeurs dont la médiane vaut 10 et la moyenne vaut 12.
2) Donner une liste de 10 valeurs pour lesquels la médiane est identique au premier quartile.
3) Donner deux séries distinctes de 6 valeurs ayant la même médiane, premier et troisième quartiles, mais dont l'une a 120 pour valeur maximale, et l'autre 12.

Proof. 1) Par exemple 6/8/10/16/20 mais il y a plein d'autres solutions.
Méthode : on range les notes par ordre croissant. On met les deux premières notes au hasard, pas trop faibles, puis la troisième (c'est la médiane) doit être 10. Ensuite, on ajuste les deux dernières pour avoir 12 de moyenne. Si les deux premières notes sont trop faibles (somme des deux inférieure à 10), on n'arrivera pas à 12 de moyenne même en mettant 20 aux deux dernières notes (méditez sur cette remarque).
2) 1/1/1/1/1/1/1/1/1/1. (c'est 10 fois la même valeur; certes c'est un peu une arnaque mais ça passe.)
3) 1/2/3/4/5/120 et 1/2/3/4/5/12 (on change juste la dernière valeur). □

Exercice 2 : *Si vous ne savez pas faire, prenez des exemples concerts de séries statistiques et regardez ce que cela donne.*
1) Que deviennent la moyenne, médiane et l'étendue d'une série statistique si l'on multiplie toutes les valeurs par un même nombre a ?
2) Même question si l'on ajoute un même nombre b à toutes les valeurs.
3) Lors d'un concours, un correcteur obtient 8 de moyenne sur l'ensemble des copies qu'il a corrigé, avec des notes comprises entre 5 et 13. L'harmonisation avec les autres correcteurs oblige à avoir une moyenne de 10 et étendue de 16. Comment doit-il modifier les notes qu'il a attribuées ?
(L'étendue est la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse).

Proof. 1) On part d'une série statistique $x_1, x_2, \dots, x_n$, rangée par ordre croissant. On note m, Me et e la moyenne, médiane et étendue. On multiplie toutes les valeurs par a : on obtient la série $ax_1, \dots, ax_n$. On note m', Me' et e' les nouvelles moyenne, médiane, étendue.
La moyenne vaut $m = \frac{x_1+x_n}{n}$, et la nouvelle moyenne $m' = \frac{ax_1+\cdots+ax_n}{n} = a\,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = a\,m$. Autrement dit, la moyenne a été multipliée par a.
La médiane Me est soit la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$ (si n impair), soit la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ (si n pair). Dans tous les cas, si ces valeurs sont multipliées par a, la médiane sera elle aussi multipliée par a.
Enfin l'étendue e vaut $e = x_n - x_1$ (plus grande moins plus petite valeur). La nouvelle étendue vaut

$$e' = a\,x_n - a\,x_1 = a\,(x_n - x_1) = a\,e \tag{1}$$

L'étendue a donc été multipliée par a.

2) On ajoute cette fois b a toutes les valeurs de la série.
La nouvelle moyenne vaut

$$m' = \frac{(x_1+b)+\cdots+(x_n+b)}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n+b+\cdots+b}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n+nb}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+b = m+b \tag{2}$$

On a ajouté b à la moyenne.
La médiane Me est soit la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$ (si n impair), soit la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ (si n pair). Dans tous les cas, si on ajoute b aux valeurs de la série, on ajoute b à la médiane.
Enfin, l'étendue ne change pas. En effet, on ajoute b à la plus petite et la plus grande valeur, mais la différence reste la même : $e' = (x_n+b)-(x_1+b) = x_n - x_1$

3) Les notes vont de 5 à 13, donc l'étendue e est de 8 au lieu de 16. La moyenne est de 8 au lieu de 10.
On peut d'abord multiplier les notes par $\frac{\text{nouvelle étendue}}{\text{ancienne étendue}} = \frac{16}{8} = 2$. Ce faisant, on multiplie aussi la moyenne par 2 : donc on a $8 \times 2 = 16$ de moyenne, au lieu des 10 voulu (de plus, certaines copies ont plus que 20 !) : on enlève 6 points à toutes les copies.
Bilan : on multiplie d'abord les notes par 2, puis on retranche 6. □

Exercice 3 : Que deviennent la moyenne, médiane, étendue si l'on multiplie tous les effectifs par 2 ? par 3 ?

Proof. Elles ne changent pas. On multiplie les effectifs par le même nombre
Remarque : Si on ajoute le même nombre à tous les effectifs, alors l'étendue ne change pas, par contre la médiane et moyenne changent, mais on ne peut pas savoir comment sans plus d'information sur la série. □

2 Géométrie vectorielle (facultatif mais intéressant pour votre culture)

2.1 Projetons

Question 2.1. *Rappeler la notion de projection orthogonale d'un point sur une droite D.*

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un autre type de projection : la projection d'un point sur une droite parallèlement à une deuxième droite.

Définition 1. *Soient D et Δ (que l'on prononce delta) deux droites (non parallèles) et M un point du plan. On appelle la parallèle à Δ passant par M coupe D en un point que l'on appelle M'.*

Question 2.2. *Faire un schéma.*

Question 2.3. *Si $\Delta \perp D$, quel est le lien entre la projection orthogonale sur D et la projection sur D parallèlement à Δ ?*

Question 2.4. *Si Δ' est parallèle à Δ, que peut-on dire de la projection sur la droite D parallèlement à Δ ?*

2.2 Le théorème de projection

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème de projection 2.5.

Théorème 2.5. *Soient A,B et C trois points, (D) et (Δ) deux droites sécantes. On appelle A', B' et C' leurs images par la projection sur la droite D parallèlement à Δ.*

$$\text{Si} \quad \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{A'C'} \tag{3}$$

Question 2.6. *On suppose $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Justifier que A,B et C sont alignés.*

Question 2.7. *Montrer que A',B' et C' sont alignés. En déduire qu'il existe un $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{A'C'}$*

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que k=k'.

Question 2.8. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 tel que $\overrightarrow{AA'} = a\,\vec{u}$. Justifier que l'on puisse écrire $\overrightarrow{BB'} = b\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{CC'} = c\,\vec{u}$, avec b et c des nombres réels.*

Question 2.9. *Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{C'C}$.*

Question 2.10. *(*) Déduire des deux questions précédentes et de l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ que*

$$\overrightarrow{A'B'} - k\overrightarrow{A'C'} = (a - ka - b + kc)\vec{u} \tag{4}$$

Question 2.11. *En déduire que $(k - k')\,\overrightarrow{A'C'} = d\,\vec{u}$.*

Question 2.12. *Supposons que $d \neq 0$. En déduire que $\overrightarrow{A'C'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Pourquoi cela est-il impossible ?*

Question 2.13. *De la question précédente, on conclut que d est nécessairement égal à 0. Pourquoi cela achève-t-il la preuve du théorème ?*

2.3 Le théorème de Thalès

Théorème 2.14. *Soit ABC un triangle et M un point de la droite (AB) distinct de A. N est un point de la droite (AC) distinct de A.*

$$\text{(i) Si} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC} \end{cases} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC} \tag{5}$$

$$\text{(ii) Si} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC} \tag{6}$$

Question 2.15. *Faire un schéma. Montrer qu'à partir de ce théorème vous pouvez retrouver le théorème de Thalès que vous connaissez déjà (celui avec les rapports de longueurs. On fera attention à* ***ne pas*** *écrire de division entre vecteurs).*

Question 2.16. *On se place dans la situation (i). En écrivant $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, montrer que $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$. En déduire $(MN) \parallel (BC)$.*

On va maintenant prouver le (ii). On suppose que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Question 2.17. *Faire un dessin.*

Question 2.18. *Montrer que l'image de M par la projection sur (AC) parallélement à (BC) est N.*
Quels sont les images de A et B par cette même projection ?

Question 2.19. *A partir du théorème de projection, achevez la fin de la preuve (c'est à dire montrez que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$).*

2.4 Application : le théorème de Pappus

Question 2.20. *Soient D et D' deux droites qui se croisent en O. Soit A un point de D et B' un point de D'. On trace une parallèle à (AB'). Celle-ci coupe D en B et D' en A'. Faire le schéma (propre et assez grand).*

A partir de là, tracez une nouvelle droite passant par B', qui coupe D en nouveau point C. Enfin, tracez la parallèle à (B'C) passant par B. Elle coupe D' en un point C'.

On va maintenant montrer que (AC') et (A'C) sont parallèles. Cela constitue une version du théorème de Pappus.

Question 2.21. *Montrer que l'on peut écrire* $\overrightarrow{OA} = k\,\overrightarrow{OB}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.

Question 2.22. *A l'aide du théorème de Thalès, montrer que* $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OA'}$.

Question 2.23. *Faire de même pour montrer que* $\overrightarrow{OC} = n\,\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OB'} = n\,\overrightarrow{OC'}$.

Question 2.24. *En déduire* $\overrightarrow{OC} = m\,\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OA'} = m\,\overrightarrow{OC'}$ *avec* $m = \frac{n}{k}$.

Question 2.25. *Achever la démonstration (avec le théorème de Thalès).*