DM 7 - Statistiques & Vecteurs - Théorèmes de Thalès et de Pappus

A rendre pour le jeudi 8 décembre

1 Statistiques (obligatoire)

Exercice 1 : 1) Donner une liste de 5 valeurs dont la médiane vaut 10 et la moyenne vaut 12.

2) Donner une liste de 10 valeurs pour lesquels la médiane est identique au premier quartile.

3) Donner deux séries distinctes de 6 valeurs ayant la même médiane, premier et troisième quartiles, mais dont l'une a 120 pour valeur maximale, et l'autre 12.

Exercice 2 : *Si vous ne savez pas faire, prenez des exemples concerts de séries statistiques et regardez ce que cela donne.*

1) Que deviennent la moyenne, médiane et l'étendue d'une série statistique si l'on multiplie toutes les valeurs par un même nombre a ?

2) Même question si l'on ajoute un même nombre b à toutes les valeurs.

3) Lors d'un concours, un correcteur obtient 8 de moyenne sur l'ensemble des copies qu'il a corrigé, avec des notes comprises entre 8 et 13. L'harmonisation avec les autres correcteurs oblige à avoir une moyenne de 10 et étendue de 16. Comment doit-il modifier les notes qu'il a attribuées ?
(L'étendue est la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse).

Exercice 3 : Que deviennent la moyenne, médiane, étendue si l'on multiplie tous les effectifs par 2 ? par 3 ?

2 Géométrie vectorielle (facultatif mais intéressant pour votre culture)

2.1 Projetons

Question 2.1. *Rappeler la notion de projection orthogonale d'un point sur une droite D.*

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un autre type de projection : la projection d'un point sur une droite parallèlement à une deuxième droite.

Définition 1. *Soient D et Δ (que l'on prononce delta) deux droites (non parallèles) et M un point du plan. On appelle la parallèle à Δ passant par M coupe D en un point que l'on appelle M'.*

Question 2.2. *Faire un schéma.*

Question 2.3. *Si $\Delta \perp D$, quel est le lien entre la projection orthogonale sur D et la projection sur D parallèlement à Δ ?*

Question 2.4. *Si Δ' est parallèle à Δ, que peut-on dire de la projection sur la droite D parallèlement à Δ ?*

2.2 Le théorème de projection

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème de projection 2.5.

Théorème 2.5. *Soient A,B et C trois points, (D) et (Δ) deux droites sécantes. On appelle A', B' et C' leurs images par la projection sur la droite D parallèlement à Δ.*

$$\text{Si} \quad \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{A'C'} \tag{1}$$

Question 2.6. *On suppose $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Justifier que A,B et C sont alignés.*

Question 2.7. *Montrer que A',B' et C' sont alignés. En déduire qu'il existe un $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{A'C'}$*

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que k=k'.

Question 2.8. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 tel que $\overrightarrow{AA'} = a\,\vec{u}$. Justifier que l'on puisse écrire $\overrightarrow{BB'} = b\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{CC'} = c\,\vec{u}$, avec b et c des nombres réels.*

Question 2.9. *Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{C'C}$.*

Question 2.10. *(*) Déduire des deux questions précédentes et de l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ que*

$$\overrightarrow{A'B'} - k\overrightarrow{A'C'} = (a - ka - b + kc)\vec{u} \tag{2}$$

Question 2.11. *En déduire que $(k - k')\,\overrightarrow{A'C'} = d\,\vec{u}$.*

Question 2.12. *Supposons que $d \neq 0$. En déduire que $\overrightarrow{A'C'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Pourquoi cela est-il impossible ?*

Question 2.13. *De la question précédente, on conclut que d est nécessairement égal à 0. Pourquoi cela achève-t-il la preuve du théorème ?*

2.3 Le théorème de Thalès

Théorème 2.14. *Soit ABC un triangle et M un point de la droite (AB) distinct de A. N est un point de la droite (AC) distinct de A.*

$$\text{(i) Si} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC} \end{cases} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC} \tag{3}$$

$$\text{(ii) Si} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC} \tag{4}$$

Question 2.15. *Faire un schéma. Montrer qu'à partir de ce théorème vous pouvez retrouver le théorème de Thalès que vous connaissez déjà (celui avec les rapports de longueurs. On fera attention à* ***ne pas*** *écrire de division entre vecteurs).*

Question 2.16. *On se place dans la situation (i). En écrivant $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, montrer que $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$. En déduire $(MN) \parallel (BC)$.*

On va maintenant prouver le (ii). On suppose que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Question 2.17. *Faire un dessin.*

Question 2.18. *Montrer que l'image de M par la projection sur (AC) parallélement à (BC) est N.*
Quels sont les images de A et B par cette même projection ?

Question 2.19. *A partir du théorème de projection, achevez la fin de la preuve (c'est à dire montrez que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$).*

2.4 Application : le théorème de Pappus

Question 2.20. *Soient D et D' deux droites qui se croisent en O. Soit A un point de D et B' un point de D'. On trace une parallèle à (AB'). Celle-ci coupe D en B et D' en A'. Faire le schéma (propre et assez grand).*
A partir de là, tracez une nouvelle droite passant par B', qui coupe D en nouveau point C. Enfin, tracez la parallèle à (B'C) passant par B. Elle coupe D' en un point C'.

On va maintenant montrer que (AC') et (A'C) sont parallèles. Cela constitue une version du théorème de Pappus.

Question 2.21. *Montrer que l'on peut écrire $\overrightarrow{OA} = k\,\overrightarrow{OB}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

Question 2.22. *A l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OA'}$.*

Question 2.23. *Faire de même pour montrer que $\overrightarrow{OC} = n\,\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'} = n\,\overrightarrow{OC'}$.*

Question 2.24. *En déduire $\overrightarrow{OC} = m\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'} = m\,\overrightarrow{OC'}$ avec $m = \frac{n}{k}$.*

Question 2.25. *Achever la démonstration (avec le théorème de Thalès).*