Devoir Maison 5 - F2 & G3 - Durée : 1h

A rendre le 10 Novembre

Exercice 1 : On considère $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$

3) Montrer que les points $A(1;1)$ et $B(3;1)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$.

4) Calculer les coordonnées du milieu de [AB]. Montrer que son abscisse vaut 2.

5) Reprendre les questions 3 et 4 avec les points $C(0;4)$ et $D(4;4)$.

6) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $M(2-x;x^2)$ et $N(2+x;x^2)$. Pourquoi M et N appartiennent-ils à la courbe $\mathcal{C}_f$? Montrer que l'abscisse du milieu de [MN] vaut 2.

7) (*) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto (x-a)^2$. Pour deux points M et N appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$ et ayant la même ordonnée, que vaudra l'abscisse du milieu de [MN] ?

8) Qu'a-t-on prouvé dans cet exo ?

Proof. Il est important de faire un schéma pour voir ce que l'on est en train de montrer.

1) f est définie sur $\mathbb{R}$.

2)

3) On a bien f(1)=1 et f(3)=1, donc A et B sont sur la courbe.

On rappelle que un point $A(x_A, y_A)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ (représentative d'une fonction f) si $y_A = f(x_A)$.

4) Les coordonnées du milieu de AB sont $(\frac{3+1}{2}; \frac{1+1}{2}) = (2;1)$. Son abscisse vaut bien 2.

5) f(0)=4 et f(4)=4 donc C et D sont sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le milieu de [CD] a pour coordonnées $(\frac{0+4}{2}; \frac{4+4}{2}) = (2;4)$. Son abscisse vaut bien 2.

6) On a $f(2-x) = x^2$ et $f(2+x) = x^2$ donc M et N sont sur $\mathcal{C}_f$.

Les coordonnées du milieu de [MN] sont $(\frac{2-x+2+x}{2}; \frac{x^2+x^2}{2}) = (2;x^2)$; son abscisse vaut bien 2.

7) Elle vaudra a. Soient M et N tel que l'énoncé les définit, on appelle y leur ordonné commune et x_M, x_N leur abscisses respectives. (C'est à dire $M(x_M;y)$ et $N(x_N;y)$) Alors comme M et N sont sur $\mathcal{C}_f$, on a $y = f(x_M)$ et $y = f(x_N)$.

Donc

$$\begin{align} f(x_M) = f(x_N) &\iff (x_M - a)^2 = (x_N - a)^2 \tag{1}\\ &\iff (x_M - a) = (x_N - a) \quad \text{ou} \quad (x_M - a) = -(x_N - a) \tag{2}\\ &\iff x_M = x_N \quad \text{ou} x_M + x_N = 2a \tag{3} \end{align}$$

La première solution $x_M = x_N$ mène en fait à M=N (les deux points sont confondus).

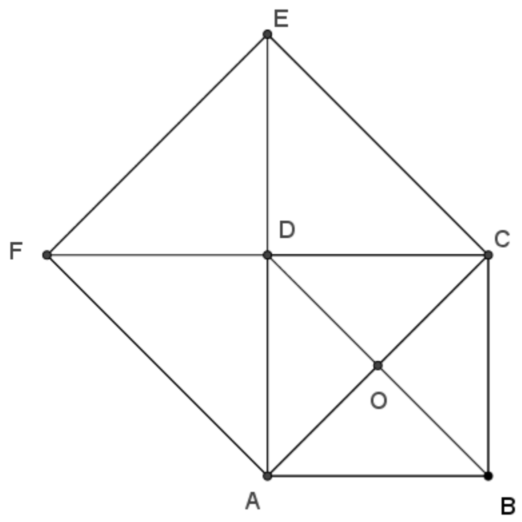
La deuxième solution nous donne $x_N = 2a - x_M$, donc $M(x_M;y)$ et $N(2a - x_M;y)$.

Remarque On pouvait aussi écrire $M(x-a;y)$ et $N(x+a;y)$.

8) On vient de montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-a)^2$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.

En effet, quand on prend deux points sur la courbe ayant la même ordonnée, on remarque que le milieu de ces deux points a une abscisse $x = a$. □

Exercice 2 : On reprend l'exo 2 du DS 2. On pose les mêmes questions, mais dans des repères différents.



ABCD et ACEF sont deux carrés.

1) a) Donner les coordonnées des points de la figure dans le repère (O;A;B).
1) b) Calculer les coordonnées des milieux de [OE] et [OF] dans ce repère.
2) a) Donner les coordonnées des points de la figure dans le repère (D;C;E).
2) b) Calculer les coordonnées des milieux de [OE] et [OF] dans ce repère.

Proof. 1)a) Dans (O;A;B) par définition O est l'origine donc de coordonnées (0;0). OA donne la graduation sur l'axe des abscisses, donc A(1;0). De même, OB donne la graduation de l'axe des ordonnées, donc B(0;1).
On lit sur la figure les coordonnées des autres points.

$$C(-1;0) \quad D(0;-1) \quad E(-1;-2) \quad F(1;-2)$$

b) Le milieu de [OE] a pour coordonnées

$$(-\frac{1}{2};-1)$$

Le milieu de [OF] a pour coordonnées

$$\frac{1}{2};-1$$

2) a) Dans (D;C;E), D est l'origine et on a C(1;0) et E(1;0).
Les autres points ont pour coordonnées :

$$A(0;-A) \quad B(1;-1) \quad O(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}) \quad F(-1;0)$$

b) Le milieu de [OE] a pour coordonnées

$$(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$$

Le milieu de [OF] a pour coordonnées

$$-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}$$

□

Exercice 3 : Un groupe d'amis projette un séjour d'une semaine au ski. La location de l'appartement pour le groupe coûte 600 euros. Le forfait des remontées mécaniques est de 200 euros par skieurs.

On appelle n le nombre de personnes dans le groupe et $f(n)$ le coût total du séjour

1) Exprimer $f(n)$ en fonction de n.

2) Que fait l'algorithme suivant ?

Input A
600 A + 200 → B
B : A → B (le ":" signifie "diviser par")
Disp B

Proof. 1) $f(n) = 600 + 200n$

2) L'algorithme prend en entrée A qui correspond au nombre d'amis, et renvoie en sortie B, qui correspond au prix du séjour par personne. A ceci près qu'il y avait une erreur d'énoncé. Pour que B soit bien le prix par personne, il fallait modifier la deuxième ligne de l'algorithme en :

$600 + 200A \to B$

Le reste de l'algorithme étant inchangé. □