DM 4 - Fonctions (F2) et Géométrie (G3) - Corrigé

A rendre pour le jeudi 13 septembre

Exercice 1) Résoudre $(x-5) \geq 0$.

2) En déduire l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{(x-5)}$.

3) Résoudre $(x-4)^2-1=0$. En déduire l'ensemble de définition de $g : x \mapsto \frac{1}{(x-4)^2-1}$.

4) Donner l'ensemble de définition de $h : x \mapsto f(x)+g(x)$.

Proof. 1) L'ensemble des solutions de l'équation $(x-5) \geq 0$ est $[5;+\infty[$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ soit définie lorsque que $x-5 \geq 0$ (en effet, on ne peut pas avoir de nombre négatif sous la racine. C'est la même équation qu'à la question 1 (et ce n'est pas complètement un hasard). Donc l'ensemble de définition de f est $[5;+\infty[$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x-4)^2-1=0 &\iff (x-4)^2=1 &(1)\\ &\iff x-4=\sqrt{1} \text{ ou } x-4=-\sqrt{1} &(2)\\ &\iff x=5 \text{ ou } x=3 &(3)\end{aligned}$$

Donc l'ensemble de solution de l'équation est $\{3;5\}$.

Autre possibilité : on remarque que $(x-4)^2-1=(x-4+1)(x-4-1)=(x-3)(x-5)$ (une mise en facteur, on utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$). Donc

$$\begin{aligned}(x-4)^2-1=0 &\iff (x-3)(x-5)=0 &(4)\\ &\iff x-3=0 \text{ ou } x-5=0 &(5)\\ &\iff x=3 \text{ ou } x=5 &(6)\end{aligned}$$

Remarque importante On rappelle que l'équation $x^2=2$ admet deux solutions : $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

De manière générale, l'équation $x^2=a$ admet (dans $\mathbb{R}$) : aucune solution si $a<0$, une solution si a=0 et deux solutions si $a>0$.

Cas	Nombre de solutions	Ensemble des solutions
$a>0$	0	$\emptyset$ (ensemble vide)
$a=0$	1	$\{0\}$
$a>0$	2	$\{-\sqrt{a};+\sqrt{a}\}$

Figure 1: Résolution de l'équation $x^2=a$ quand $x \in \mathbb{R}$: 3 cas possibles

(On ne confond pas $\emptyset$ qui est l'ensemble vide, c'est à dire sans aucun éléments à l'intérieur, et $\{0\}$ qui est l'ensemble contenant seulement 0 comme élément.)

$\square$

Exercice Soit ABCD un carré de côté 6 cm, et M un point mobile sur le segment AB. On pose AM=x.

0) Faire un schéma.

1) A quel intervalle x appartient-il ?

2) On note f(x) l'aire du triangle ADM.

a/ Exprimer f(x) en fonction de x.

b/ Déterminer la position de M pour que l'aire du triangle ADM soit égale au tiers de l'aire du carré ABCD.

Proof. 0) Remarque : certains élèves ont tracés ABCD carré au lieu de ABCD. On trouvait les même résultats pour les questions 1 et 2, mais c'était un peu plus dur. Faites quand même attention à a lecture de l'énoncé pour éviter des erreurs bêtes...

1) On a $x \in [0;6]$.

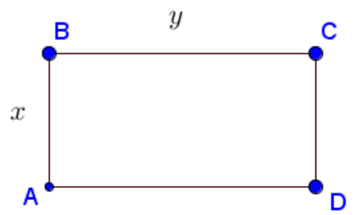
2) a/ $f(x) = \frac{AD \times AM}{2} = \frac{6x}{2} = 3x$.

b/ L'aire du carré est de $6 \times 6 = 36$, et un tiers de 36 vaut 12. On veut donc résoudre :

$$f(x) = 12 \tag{7}$$

On trouve donc $x = \frac{12}{3} = 4$. □

Exercice On dispose de 10 cm de corde, et on désire former avec cette corde un rectangle d'aire maximale. On donne la figure ci-dessous. ABCD est un rectangle de périmètre 10 cm, et on pose AB=x et BC=y. (AB est la largeur ou la longueur du rectangle).

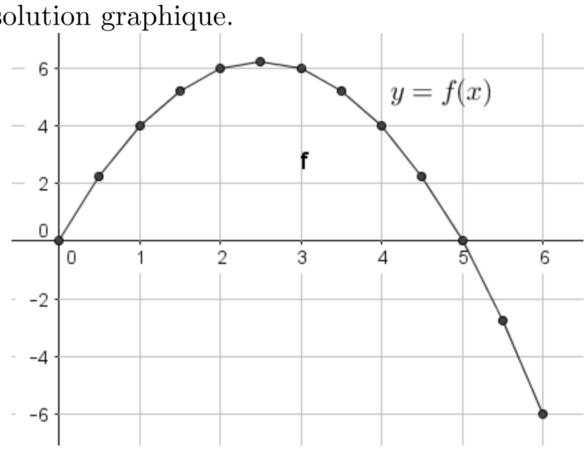


1) Quelles sont les valeurs pouvant être prise par x ?

2) Montrer que $x + y = 5$.

3) Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle. Quel est le domaine de définition de $\mathcal{A}$? Montrer que $\mathcal{A}(x) = x(5 - x)$.

Résoudre le problème revient donc à chercher le maximum de $\mathcal{A}$. On propose une résolution graphique.



4) On introduit $f : x \mapsto -x^2 + 5x$. Quel est le domaine de définition de f ?

5) La courbe ci-contre (à gauche) représente la fonction f sur [0;6].

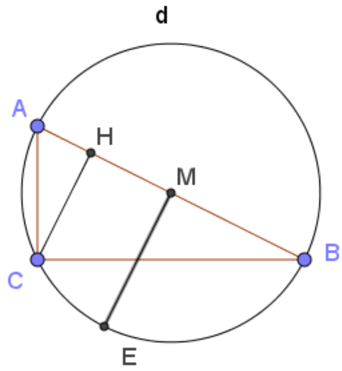
Lire graphiquement le maximum de f. Pour quel x est-il atteint ? En déduire la forme du rectangle d'aire maximale.

5) (*) Une aire peut elle être négative ? Dans ce cas, comment expliquez vous les valeurs de f pour $x > 5$. Ont-elles un sens pour le problème considéré ?

Proof. Voir la correction du DS 1 (sur l'ENT/Pronote). □

Exercice (**, vraiment dur) Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse fait 10 cm et la hauteur 6 cm (celle perpendiculaire à l'hypothénuse). Quelle est l'aire de ce triangle ? (La réponse *n'est pas* 30, il y a un piège).

Proof. Un tel triangle n'existe pas (du moins en géométrie plane/euclidienne).



Méthode astucieuse (Vu dans une seule copie). Soit ABC un triangle rectangle d'hypoténuse AB=10. Alors les 3 points A,B,C sont sur le cercle circonscrit au triangle. Comme ABC est rectangle, ce cercle est le cercle de centre le milieu M de AB et de diamètre l'hypoténuse AB=10 (ou de rayon MA = 5). Ainsi, la hauteur maximale perpendiculaire à l'hypoténuse, notée CH sur le schéma est inférieure au rayon ME de ce cercle, donc $CH \leq 5$. Autrement dit, une hauteur de 6 cm est impossible, et le triangle de l'énoncé n'existe pas.

Méthode plus calculatoire (fait dans 1 copie, 1 autre qui débute le raisonnement sans aboutir; c'était plus accessible que la première méthode, au sens où il n'y avait pas besoin d'avoir d'inspiration divine. Par contre la preuve est plus longue et moins limpide, on ne voit pas trop où l'on va).

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (Pythagore dans ABC rectangle en C)}$$
$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \text{ (Pythagore dans BCH rectangle en H)}$$
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \text{ (Pythagore dans ACH rectangle en H)}$$

En reprenant la première ligne et combinant avec les deux suivantes, on trouve :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \tag{8}$$
$$= AH^2 + 2CH^2 + HB^2 \tag{9}$$

Or : $HB = (AB - AH) = (10 - AH)$, donc $HB^2 = 100 - 2AH + AH^2$.
On arrive donc à :

$$AB^2 = 2CH^2 + 2AH^2 + 100 - 20AH \tag{10}$$

Or $AB^2 = 100$ et $2CH^2 = 2 \times 6^2 = 72$, donc l'équation 10 donne :

$$100 = 72 + 2AH^2 + 100 - 20AH \tag{11}$$
$$\iff 0 = 2AH^2 - 20AH + 72 \tag{12}$$
$$\iff AH^2 - 2 \times 5AH + 36 = 0 \tag{13}$$

On se retrouve donc à devoir résoudre une équation du second degré. Une méthode est de mettre en facteur pour compléter le carré (on verra ça plus tard dans l'année). Une autre méthode plus abordable est de tracer la courbe à la calculatrice et lire graphiquement les solutions (ici l'absence de solutions).

$$2AH^2 - 20AH + 72 = 0 \iff (AH - 5)^2 - 25 + 36 = 0 \tag{14}$$
$$\iff (AH - 5)^2 + 11 = 0 \tag{15}$$
$$\iff (AH - 5)^2 = -11 \tag{16}$$

Or cette dernière équation n'admet pas de solution ! Autrement dit, le triangle de l'énoncé n'existe pas (car s'il existait, alors nécessairement cette équation admettrait la distance AH comme solution).

$\square$