DM 14 - Fonction carré - Échantillonnage

Exercice 1 : Dans un article sur le Monde[1], après des élections régionales en Allemagne en 2017, on peut lire :

Avec 32% des voix, la CDU devance en effet le SPD de cinq points (27,1%). Or, personne n'imaginait un tel écart : le dernier sondage, publié jeudi par la chaîne de télévision ZDF, créditait la CDU de seulement trois points de plus que le SPD.

Le sondage en question[2] donnait la CDU trois points devant le SPD (32 % contre 29%), avec 1004 personnes interrogées.

Commentez la phrase du journaliste, en particulier l'expression *personne n'imaginait un tel écart.*

Solution: Exercice 1 Le sondage est réalisé sur 1 004 personnes, et donne un résultat de 29% pour le SPD. Ainsi, l'intervalle de confiance au seuil 0,95 est $I = [0,29 - \frac{1}{\sqrt{1004}}; 0,29 + \frac{1}{\sqrt{1004}}] = [0,26; 0,32]$.

On peut conclure de ce sondage que le score du SPD sera compris entre 26% et 32% avec une probabilité de 95%.

Le score réel (29%) du SPD n'est donc pas une surprise. Celui de la CDU non plus (le sondage et le score réel étant les même). Le journaliste a donc eu tort de déclarer que *personne n'imaginait un tel écart.*

Exercice 2 : En 2016, la proportion de français possédant un smartphone était de 77%.

1. On considère un échantillon de 400 individus. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des français possédant un smartphone.
2. Quelle est la largeur de cette intervalle ? Si l'on considérait un échantillon de 500 personnes, la largeur de l'intervalle de fluctuation au seuil 95% serait-elle plus large ou moins large ?
3. Un journaliste déclare : *Sur 400 individus, la probabilité qu'il y ait entre ... et ... individus qui possèdent un smartphone est de 95%.* Le journaliste a tout oublié de ses cours de maths de seconde. Aidez-le à compléter sa phrase.

Solution: Exercice 2

Ici, on a $n = 400$ et $p = 0,77$

1. Un intervalle de fluctuation au seuil 0,95 est $I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

   Donc $I = [0,77 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,77 + \frac{1}{\sqrt{400}}] = [0,72; 0,82]$
2. La largeur de l'intervalle est 0,82-0,72 = 0,10. Elle serait moins importante avec un échantillon de plus grande taille.
3. Sur 400 individus, la probabilité que la fréquence soit comprise entre 0,72 et 0,82 est 95%.

   Or $f = \frac{\textbf{nombre d'individu ayant un smarphone}}{400}$.

   Et $400 \times 0,72 = 288$ et $400 \times 0,82 = 328$

   Sur 400 individus, la probabilité qu'il y ait entre 288 et 328 individus qui possèdent un smartphone est de 95%

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4(x+3)^2 - 25$ (forme A).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère (O;I;J).

1. Justifier que pour tout réel x, $f(x) = 4x^2 + 24x + 11$ (forme B) et $f(x) = 4\big(x + \frac{1}{2}\big)\big(x + \frac{11}{2}\big)$ (forme C)
2. Comment appelle-t-on les formes A, B et C ?
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$. Expliquer votre raisonnement.
4. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$
   (b) Résoudre $f(x) > 0$

[1] http://www.lemonde.fr/europe/article/2017/05/08/en-allemagne-severe-defaite-des-sociaux-democrates-dans-le-schleswig-holstein_5124137_3214.html

[2] http://www.wahlrecht.de/umfragen/landtage/schleswig-holstein.htm

(c) Trouver le les coordonnées du sommet de la parabole. En déduire le minimum de f.

(d) Calculer $f(0)$.

(e) Résoudre $f(x) = 11$

(f) Résoudre $f(x) = -25$

(g) (*) Résoudre $f(x) = -16$

Solution:

1. On développe la forme A et C en espérant retrouver la forme B.

$$\begin{aligned} 4(x+3)^2 - 25 &= 4(x^2+6x+9) - 25 \\ &= 4x^2 + 24x + 36 - 15 \\ &= 4x^2 + 24x + 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\big(x+\frac{1}{2}\big)\big(x+\frac{11}{2}\big) &= 4(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}x + \frac{11}{4}) \\ &= 4x^2 + 2x + 22x + 11 \\ &= 4x^2 + 24x + 11 \end{aligned}$$

2. La forme A est la forme canonique, B la forme développé et C la forme factorisée.

3.

4. (a) Pour résoudre f(x)=0, on utilise la forme factorisée. Cela permet d'avoir l'équation directement sous forme d'équation produit. Pour que $f(x) = 0$ à la seule condition que l'un des termes du produit soit nul, c'est à dire soit $x + \frac{1}{2} = 0$, soit $x + \frac{11}{2} = 0$. L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est donc $S = \{-\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\}$

   (b) De même, on va utiliser la forme factorisée, en dressant le tableau de signe de $x \mapsto 4\big(x+\frac{1}{2}\big)\big(x+\frac{11}{2}\big)$.

   (c) En utilisant la forme canonique, et les notations du cours, on a $f(x) = a(x-\alpha) + \beta$, avec $\alpha = -3$ et $\beta = 25$. Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha; \beta)$, donc ici (-3;25).

   (d) $f(0) = 11$ (le plus rapide est de prendre la forme développé, mais une autre forme convient).

   (e) Pour résoudre $f(x) = 11$, on choisit la forme développée.

$$\begin{aligned} f(x) = 11 &\iff 4x^2 + 24x + 11 = 11 && (1) \\ &\iff 4x^2 + 24x = 0 && (2) \\ &\iff x(4x+24) = 0 && (3) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -24 && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

   L'ensemble de solution de $f(x) = 11$ est $S = \{-24; 0\}$.

   (f) Pour résoudre $f(x) = -25$, on choisit la forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) = -25 &\iff 4(x+3)^2 - 25 = -25 && (6) \\ &\iff 4(x+3)^2 = 0 && (7) \\ &\iff (x+3)^2 = 0 && (8) \\ &\iff x + 3 = 0 && (9) \\ &\iff x = -3 && (10) \\ & && (11) \end{aligned}$$

   Donc la seule solution de $f(x) = -25$ est $x = -3$.

   (g) Pour résoudre $f(x) - 16$, on choisit la forme canonique.

$$
\begin{aligned}
f(x) = -16 &\iff 4(x+3)^2 - 25 = -16 && (12)\\
&\iff 4(x+3)^2 - 25 + 16 = 0 && (13)\\
&\iff 4(x+3)^2 - 9 = 0 && (14)\\
&\iff 2^2(x+3)^2 - 3^2 = 0 && (15)\\
&\iff (2(x+3))^2 - 3^2 = 0 && (16)\\
&\iff (2x+6)^2 - 3^2 = 0 && (17)\\
&\iff (2x+6-3)(2x+6+3) = 0 && (18)\\
&\iff (2x+3)(2x+9) = 0 && (19)\\
&\iff 2x+3 = 0 \quad \text{ou} 2x+9 = 0 && (20)\\
&\iff x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} x = -\frac{9}{2} && (21)\\
& && (22)
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble de solution de $f(x) = -16$ est $S = \{-\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\}$