DM 13 - Fonction carré - Équation de droite - Probabilité

A rendre pour le 4 Mai 2017

Exercice 1 : (3 points) Dans une interrogation écrite, la consigne est la suivante : *Pour chacune des questions, répondre par Vrai ou Faux.* Il y a 4 questions.

Un élève qui ne connaît pas sa leçon décide de répondre au hasard à toutes les questions.

1. Combien de façons possibles peut-il répondre ?
2. Quelle probabilité a-t-il de répondre tout juste ?
3. Quelle probabilité a-t-il d'avoir au moins la moyenne (c'est à dire 2, 3 ou 4 réponses justes) ?

Solution: Exercice 1

1. Il y a 4 questions, et 2 manières de répondre par questions, donc $2^4 = 16$ manières de répondre au total.
2. Parmi les 16 manières de répondre, seule 1 aura tout juste. De plus il choisit ses réponses au hasard, donc nous sommes en situation d'équiprobabilité. La probabilité qu'il ait tout juste est donc de $\frac{1}{16}$.
3. La probabilité d'avoir la moyenne est la somme des probabilité d'avoir répondu tout juste, ou 3 réponses justes, ou 2 réponses juste.
   - On a vu que p(tout juste) $= \frac{1}{16}$.
   - Pour avoir 3 réponses justes, cela veut dire qu'il y a une réponse fausse. Cette réponse peut être à la première question, ou à la deuxième ou à la troisième, ou à la quatrième. Cela fait 4 possibilités : donc p(3 réponses justes) $= \frac{4}{16}$
   - Passons au cas deux réponses justes.
     - La première réponse juste peut être sur la première question : cela laisse 3 possibilités pour la deuxième réponse juste.
     - Si la première réponse juste est sur la deuxième question, cela laisse 2 possibilités pour la deuxième réponse juste.
     - Si la première réponse juste est sur la troisième question, cela laisse 1 seule possibilités pour la deuxième réponse juste (en quatrième question).
     - Enfin, la première réponse juste ne peut être sur la quatrième question (car on ne pourrait pas mettre de deuxième réponse juste).

     Il y a donc 3+2+1 = 6 possibilités. Donc p(2 réponses justes) $= \frac{6}{16}$

   Donc p(avoir la moyenne) $= \frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16}$.

Exercice 2 : Parmi les expressions algébriques ou équations suivantes, donner celle qui permet de résoudre chaque problème énoncé ci-dessous. Puis donner la solution à chaque problème.

Problème 1 : On cherche l'aire maximale d'un rectangle de périmètre 50.
Problème 2 : On cherche les nombres égaux à leur carré
Problème 3 : On cherche deux nombres dont le produit vaut 50 et la somme 25.

Expression 1 : $x^2 - x = 0$
Expression 2 : $x(25 - x) = 50$
Expression 3 : $x^2 - 50$
Expression 4 : $x(25 - x)$

Solution: Exercice 2

1. Considérons le **problème 1**, et appelons x et y les longueurs des côtés. Le rectangle a pour périmètre 50, donc $2x + 2y = 50$. L'aire du rectangle vaut xy. De plus, comme $y = 25 - x$, l'aire vaut en fait $x(25 - x)$. Il nous faut calculer l'aire maximale, donc étudier la fonction $x \mapsto x(25 - x)$: c'est l'**expression 4**.

   Considérons maintenant le **problème 2**. Soit x un nombre égal à son carré. Donc mis en équation, cela donne $x^2 = x$, autrement dit $x^2 - x = 0$. Donc c'est l'**expression 1**.

Considérons enfin le problème 3. Appelons x et y deux nombres dont le produit vaut 50 et la somme 25. Mis en équation, cela donne $xy = 50$ d'une part, et $x + y = 25$ d'autre part. Comme $x + y = 25$, on a en particulier $y = 25 - x$, et on peut remplacer y par $25 - x$ dans l'équation $xy = 50$. Cela donne $x(25 - x) = 50$. On est donc amené à travailler avec l'**expression 2**.

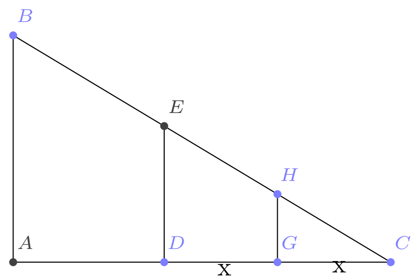
2. Résolvons le problème 1. On est amené à trouver le maximum de la fonction $f(x) = x(25 - x)$. On peut le faire graphiquement, en traçant la fonction et lisant les coordonnées de la fonction. Mais $f(x)$ est une fonction polynomiale de degré 2.

   Méthode 1 Donc sa courbe représentative est une parabole. Le terme devant x^2 est négatif (et vaut -1), donc la parabole admet un maximum. Ce maximum est situé au milieu, entre les deux zéros de f. Or $f(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et 25. Donc le maximum est au milieu de 0 et 25, c'est à dire $\frac{0+25}{2} = 12,5$. Or $f(12,5) = ...$, donc le maximum de f vaut ...., et donc l'aire maximale d'un rectangle de périmètre 50 est ...

   Méthode 2 On a $f(x) = -x^2 + 25x$. Donc f est une fonction polynomiale de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a = -1$, $b = 25$ et $c = 0$. $a < 0$ donc f admet un maximum, qui est le sommet de la parabole. Or le sommet a pour coordonnées $S(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$. Or $-\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2\times(-1)} = 12,5$. Donc S(12,5; f(12,5)). On conclut comme pour la méthode 1.

Exercice 3 : ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=9cm et AC=15cm.

G et D sont deux points du segment [CA] tels que CG=GD.
On construit les rectangles ADEF et DGHI comme indiqué sur la figure.
On pose alors CG=GD=x avec $0 < x < 7,5$.
Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires des rectangles DGHI et ADEF sont égales.



1. Montrer que les droites (AB), (ED) et (GH) sont parallèles.
2. (a) Exprimer GH en fonction de x. En déduire l'aire du rectangle DGHI en fonction de x.
   (b) Exprimer ED en fonction de x. En déduire l'aire du rectangle ADEF en fonction de x.
3. Résoudre alors le problème.

Solution: Exercice 3

1. L'énoncé nous dit que ADEF et DGHI sont des rectangles, donc en particulier on peut en déduire que les droites (HG) et (AC) sont perpendiculaire, de même que les droites (ED) et (AC). Enfin, ABC est un triangle rectangle en A, donc (AB) est perpendiculaire à (AC).

   Donc les trois droites (AB), (ED) et (HG) sont perpendiculaires à une même droite (la droite (AC)), donc ces trois droites sont parallèles (axiome d'Euclide).

2. (a) On utilise le théorème de Thalès dans les triangles CGH et CAB (car (AB) et (GH) sont parallèles). Cela donne :
   $$\frac{GH}{AB} = \frac{CG}{CA} \quad (1)$$
   Donc $GH = AB \times \frac{CG}{CA} = 9 \times \frac{x}{15} = \frac{3}{5}x$
   Enfin, l'aire de DGHI vaut $DG \times GH = x \times \frac{3}{5}x = \frac{3}{5}x^2$
   (b) On utilise le théorème de Thalès dans les triangles CDE et CAB (car les droites (ED) et (AB) sont parallèles). Cela donne :
   $$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{CA} \quad (2)$$

DOnc $ED = AB \times \dfrac{CD}{CA} = 9 \times \dfrac{2x}{15} = \dfrac{6}{5}x$

L'aire du rectangle ADEF vaut donc $AD \times ED = (15-2x) \times \dfrac{6}{5}x = 15 \times \dfrac{6}{5}x - 2x \times \dfrac{6}{5}x = 18x - \dfrac{12}{5}x^2$

3. On est amené à résoudre l'équation $\dfrac{3}{5}x^2 = 18x - \dfrac{12}{5}x^2$. Cette équation se ramène à $(\dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{5})x^2 - 18x = 0$, ce qui donne $\dfrac{15}{5}x^2 - 18x = 0$, ie $3x^2 - 18x = 0$. On peut simplifier par 3 pour avoir $x^2 - 6x = 0$, puis mettre x en facteur et obtenir : $x(x-6) = 0$. On a donc une équation produit, dont les solutions sont $x = 0$ et $x = 6$.

   La solution $x = 0$ correspond à des carré plats (pas très intéressante, mais valide tout de même).