AP - Logique et raisonnement

1 Syllogisme et sophisme

Définition 1. *Le syllogisme est un raisonnement logique à deux propositions (également appelées prémisses) conduisant à une conclusion.*

Exercice 1 : Identifier les deux prémisse et la conclusion dans l'exemple suivant.
Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme donc Socrate est mortel

Exercice 2 : *Tout ce qui est super rare est aussi super cher ; or une Lamborghini neuve a 20€ est super rare, donc une Lamborghini neuve à 20€ est super chère.*
Identifier les deux prémisse et la conclusion dans ce nouvel exemple. Quelque chose vous choque-t-il ? Pourquoi ?

Proposition 1.1. *Représentation ensembliste du raisonnement par syllogisme.*

Exercice 3 : Toutes les roses sont des fleurs. Certaines fleurs se fânent vite. Donc certaines roses se fânent vite.

2 Contre-exemple

Proposition 2.1. *Pour montrer qu'une proposition est fausse, on peut montrer que sa négation est vraie.*

Exercice 4 : Soit P la proposition : *Tous les élèves de la seconde A sont des garçons.*
Énoncer la négation de P. Laquelle de P et de non(P) est vraie ?

Exercice 5 : Examinez chacune des phrases suivantes : si elle est vraie, démontrez-la ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Parmi trois nombres entiers, il y en a au moins deux qui ont la même parité.
2. Tous les quadrilatères ont au moins un angle droit.
3. Toute fonction non croissante sur [a ;b] est décroissante sur [a ;b]
4. Toutes les fonctions affines sont décroissantes.
5. Toutes les fonctions linéaires sont croissantes.
6. Toute boucle obtenue en collant ensemble les deux extrémités d'une bande de papier a une face interne et une face externe.
7. Pour tout réel positif x, on a $x \leq x^2$.
8. Si a et b sont deux entiers pairs, alors $a + b$ est pair.
9. Si a et b sont deux entiers impairs, alors $a + b$ est un entier impair.

3 Raisonnement par l'absurde

Définition 2. *Le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer une assertion P en vérifiant que la négation de P conduit à une contradiction avec les hypothèses.*

Exercice 6 : Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent AB=4,9 ; AC=4 et BC=3,1. ABC est-il un triangle rectangle ?

Exercice 7 : Soit MRP un triangle tel que MR = 6 cm ; MP = 4,5 cm et PR = 3,2 cm. N est le milieu de [MP] et Q le point de [MR] tel que QR = 3,2 cm. Les droites (NQ) et (RP) sont-elles parallèles ?

Exercice 8 : 2 est-il solution de $x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$?

Exercice 9 : Il est impossible de diviser par zéro. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier ; $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal ; $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Il existe une infinité de nombres premiers.

4 Autour de la structure *Si ...alors*

4.1 Premiers exemples

Exercice 10 : *S'il pleut, alors j'irai au cinéma.*

1. Je suis allé au cinéma. A-t-il plu ?
2. Je ne suis pas allé au cinéma. A-t-il plu ?
3. En fait, je dis : *Si je ne suis pas allé au cinéma, alors c'est qu'il n'a pas plus.* Cela change-t-il quelque chose ?

Exercice 11 : Un enfant ne range jamais sa chambre. Pour l'inciter à la ranger, ses parents lui dise : *Si tu ranges ta chambre, alors tu auras du chocolat.* L'enfant ne range toujours pas sa chambre. Pire, le lendemain, il réclame fièrement du chocolat a ses parents. Va-t-il se faire punir ?
Après discussion, les parents se rendent compte de leur erreur, et disent à leur enfant : *Si tu n'a pas de chocolat, alors cela veut dire que tu n'as pas rangé ta chambre.* Mais cela change-t-il quelque chose ?
Excédés, les parents lui dise maintenant : *Tu auras du chocolat si et seulement si tu ranges ta chambre.* L'enfant peut-il encore faire le malin ?

Exercice 12 : Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 13 :

1. Les diagonales d'un quadrilatère mesurent 3 cm et 5 cm. Est-ce un rectangle ?
2. On sait que ABCD est un parallélogramme. Est-ce un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ?
3. Un quadrilatère a des diagonales de même longueur. Est-ce un rectangle ?
4. Un quadrilatère a trois angles droits. A-t-il des diagonales de même longueur ?

Exercice 14 : L'énoncé suivant est-il vrai ? *Si* $x^2 > 1$, *alors* $x > 1$

4.2 Formalisation mathématique

Définition 3. *La proposition* si A alors B *se note :* $A \Rightarrow B$. *On lit* A implique B.

Proposition 4.1. *Si $A \Rightarrow B$ et la proposition A est vraie, alors la proposition B est vraie.*

$A \Rightarrow B$, c'est soutenir que B est vraie à chaque fois que A l'est. Mais B peut être vraie sans que A le soit.
$A \Rightarrow B$ est fausse s'il existe une situation où A est vraie, mais B fausse. Une telle situation est appelée un *contre-exemple.*
S'il n'existe pas de contre-exemple, alors $A \Rightarrow B$ n'est pas fausse, donc est vraie.

Exemple Donner des exemples de propositions A et B tels que $A \Rightarrow B$

Exercice 15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x + 1 = 2x + 3$.

Proposition 4.2. *Si $A \Rightarrow B$ et B est vraie, alors on ne peut pas en déduire que A est vraie. Pour cela, il faudrait disposer de $B \Rightarrow A$ (appelée proposition réciproque).*

Exemple ABCD rectangle $\Rightarrow$ ABCD parallélogramme, mais la réciproque est fausse.

Exercice 16 : Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels.

1. $a^2 = b^2$
2. a=b
3. $a = -b$
4. (a-b)(a+b)=0
5. a=b ou a=-b
6. a=0 et b=0

Quelles sont les implications du type $1 \Rightarrow \dots$ vraies pour tout a et b réels. Pour celles qui ne sont pas vraies, donner un contre-exemple.
Quelles sont les implications du type $\dots \Rightarrow 1$ vraies pour tout a et b réels. Pour celles qui ne sont pas vérifiées, donner un contre-exemple.
Quelles sont les équivalences du type $1 \Leftrightarrow \dots$ qui sont vérifiées ?
Application : résoudre l'équation (E) $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$

4.3 Équivalence

Définition 4. *Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$, alors on note $A \iff B$ et on lit* A équivaut à B *ou* A si et seulement si B. *En pratique, cela veut dire que si A est vraie, B l'est aussi, et si B est vraie, A l'est aussi.*

Exercice 17 : Les équivalences suivantes sont-elles vraies ? Justifier.
$(a+b)^2 = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$
ABC est un triangle rectangle en C $\iff AC^2 + BC^2 = AB^2$

Exercice 18 : Faire le lien avec l'équivalence entre des équations (définie dans le cours).

4.4 Notion de contraposée

Définition 5. *La contraposée de la proposition $A \Rightarrow B$ est l'affirmation $nonB \Rightarrow nonA$.*

Exercice 19 : Etablir la contraposée de *S'il pleut, j'irai au cinéma.*

Proposition 4.3. *La contraposée de la contraposée d'une proposition P est P.*

5 Maths VS reste du monde

Exercice 20 : Sur le menu du restaurant scolaire il est écrit : fromage ou yaourt. Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

Exercice 21 : Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.

1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
2. Les deux phrases suivantes : « *Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse* » et « *Tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse* » désignent-elles les mêmes élèves ?

Exercice 22 : (1) *"Si la température dépasse 25 alors tu pourras aller te baigner".*
L'enfant aura-t-il la permission de se baigner s'il fait 20 ? s'il fait 28 ?
(2) *"Tu pourras aller te baigner si la température dépasse 25".*
Est-ce que les phrases (1) et (2) ont la même signification dans le langage courant ? Et dans le langage mathématique ?