Questions du jury

Maximilien Dreveton

July 13, 2016

Remarque : grosse chance au tirage, les deux dernières leçons préparées de l'année. Donc faire les plans en 3h n'a pas été trop dur.

1 Algèbre (note : 19)

Leçon choisie : 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Autre leçon : 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

1.1 Plan

En gros le même plan que celui fait avec Céline (dernière leçon préparée de l'année), il doit être à la BU. J'ai enlevé le passage sur les corps parfait (en fait j'avais assisté à un oral où le jury le posait en question, et je m'attendais voir espérais l'avoir aussi, mais j'ai eu droit à autre chose) et Molien (le truc que Bastien avait fait en développement, trop dur et pas indispensable).

I/ Définition (définition, racines multiples lien avec polynôme dérivée, notion de corps algébriquement clos (uniquement l'exemple de C, pas parlé de Q, encore moins Steinitz), corps rupture/décomposition (dév 1)).

II/ Utilisation des racines (polynômes symétriques, lien coeff racines, résultant; Kronecker en développement)

III/ Algèbre linéaire (valeur propre, critère de diagonalisation/trigonalisation, Ghersgorin, calcul exponentielle par interpolation)

1.2 Questions

Question 1.1. *Énoncer Gersgorin + preuve*

(j'avais juste mis dans le plan : théorème de Gersgorin sans l'énoncé précis, d'où la question).

Réponse $Sp(A) \subset \bigcup_i D\Big(|a_{ii}|, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big)$

Soit x vp associé à $\lambda \in Sp(A)$, et i indice tel que $|x_i| = ||x||_\infty$ (non nul car x vp donc non nul).

On regarde la ligne i de la relation $Ax = \lambda x$:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \sum_j a_{ij}x_j = \lambda x_i \tag{1}$$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \tag{2}$$

Puis j'ai dit qu'on peut être plus fin (et compter le nombre de valeurs propres dans les composantes connexes), mais le jury est passé à autre chose.

Question 1.2. *Que peut on dire des propriétés de $\mathbb{K}[A]$ où A est une matrice ?*

Réponse C'est en fait un corps, isomorphe à $\mathbb{K}[X]/(\mu_A)$, et l'inverse est donné par une relation de Bézout. C'est aussi une algèbre de dimension fini.

Question 1.3. *P polynôme, comment prouver que P$\in A := F_q[X]$ est irréductible*

Réponse J'ai dis si P est de degré 2 ou 3 on regarde s'il a des racines.

Après le jury m'a guidé pour en gros faire l'algorithme de Berlekamp. C'était assez long, mais ils alternaient entre cet exo et les autres questions suivantes (plus faciles).

Posons P=$P_1 \dots P_r$ facteurs irréductibles distincts (donc premier entre eux).

Que peut on dire de $\mathbb{F}_q[X]/(P)$

Si r=1 c'est un corps (et P irréductible), sinon c'est un anneau commutatif non intègre.

Par le lemme chinois on a $\mathbb{F}_q[X]/(P) \approx \mathbb{F}_q[X]/(P_1) \times \dots \times \mathbb{F}_q[X]/(P_r)$ (produit de r corps). On note $\tilde{A}$ ce produit.

On introduit : $\mathbb{F}_q[X] \to \mathbb{F}_q[X] : Q \mapsto Q^q$. C'est un morphisme (Frobenius). On note ϕ ce morphisme exprimé dans $\tilde{A}$. On étudie $Ker(\phi - Id)$.

On a $\phi(X_1, \dots, X_r) = (X_1, \dots, X_r) \iff (X_1^q, \dots X_r^q) = (X_1, \dots, X_r) \iff X_i \in \mathbb{F}_q$

La dimension du noyau (vu comme ev sur F_q) est donc r.

Puis des questions sur matrices en formes échelonnée réduite, algorithme de Gauss (il y avait un lien avec l'exo mais je ne me souviens plus).

Question 1.4. *Expliciter le corps de rupture et décomposition de $X^3 - 2$, donner son degré. (j'avais mis cet exemple dans le plan).*

Réponse 3 corps de rupture possibles, de degré 3, mais ils sont isomorphes.

Le corps de décomposition est de degré 6.

Question 1.5. *Avez vous une application du théorème de structure des polynômes symétriques ? (le théorème était dans le plan).*

Réponse Aucune idée le jour J, encore moins aujourd'hui.

Question 1.6. *Expliquer ce que vous entendez par "on peut calculer l'exponenntielle de matrice par interpolation de Lagrange" ? (la phrase était telle quel dans mon plan)*

Réponse $\mathbb{C}[A]$ fermé (ev de dimension finie), donc $\exp A \in \mathbb{C}[A]$, et on peut l'avoir en interpolant aux valeurs propres.

Supposons A diagonalisable (par exemple si ses valeurs propres sont distinctes). Alors si $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ alors $A = QDQ^{-1} \Rightarrow P(A) = QP(D)Q^{-1} = Qexp(D)Q^{-1} = \exp A$

Si A n'est pas diagonalisable, il faut interpoler sur les dérivées en plus (mais le jury n'a pas poussé la dessus).

Question 1.7. *Calculer* $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

Réponse On retrouve la rotation d'angle t. Calculer les puissances paires et impaires (intuiter la relation de récurence) pour retrouver le développement en série entière de cos(t) et sin(t). J'ai du faire les calculs.

2 Analyse (note : 16)

Leçon choisie : 240 produit de convolution, transformée de Fourier. Exemple applications.

Autre leçon : 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

2.1 Plan

C'était la dernière leçon d'analye que j'avais préparé (avec Tristan) en cours. Donc les 2 premières parties sont exactement les même que le plan de la BU. Par contre j'ai viré la dernière partie sur les distributions (trop dur) et mis des probas (fonction caractéristique) à la place.

I/ Convolution

II/ TF (d'abord dans L^1, puis dans S (avec les propriétés échange multiplication/dérivation + lien avec régularité et décroissance de la TF) pour étendre à L^2).

III/ Fonction caractéristique (définition, caractérise la loi, on dérive pour retrouver les moments qui eux ne caractérise pas la loi; théorème de Lévy + TCL, appli : intervalle de confiance)

2.2 Questions

Question 2.1. $u \in C_c^0, \hat{u} \in C_c^0$, *que peut-on dire de u ?*

(C'est texto la question que M. Bousquet avait posé à Trisan en cours.... je me souvenais du résultat mais bien sûr j'avais oublié comment faire ....)

Réponse On montre que u=0 .

Par inversion de Fourier, on a :

$$u(t) = \int_a^b e^{-2i\pi xt}\hat{u}(x)dx$$

L'intégrale est sur un compact (que l'on insère dans l'intervalle $[a,b]$) car $\hat{u}$ est à support compact.

Avec cette expression, on voit que u est en fait C^∞, et même holomorphe sur $\mathbb{C}$. Comme u est holomorphe et égale à la fonction nulle sur $]-\infty, c[$ pour un certain c, alors u=0.

Vu que j'ai un peu galéré, ils m'ont un peu cuisiné sur les théorèmes de continuité/dérivabilité/holomorphie sous $\int$ et prolongement analytique.

Question 2.2. *Calculer la convolée de la gaussienne avec elle même*

Réponse $u(x) = e^{-x^2}$ est sa propre transformée de Fourier (à une constante près) et on utilise $\mathcal{F}(u * u) = \mathcal{F}u\ \mathcal{F}u$.

Le jury m'a demandé de poursuivre les calculs jusqu'au bout, j'ai pas pu y échapper...

Question 2.3. *Lien entre TF et multiplication, dérivation, et régularité*

Réponse C'était dans le plan, et ils ne m'ont pas trop torturé plus la dessus.

Question 2.4. $f \in L^2, f'' \in L^2$*, montrer que* $f' \in L^2$.

Réponse Idée : la TF échange dérviation et multiplication, puis Cauchy Schwarz.

$$\hat{f''}(x) = (-2i\pi x)^2\hat{f} \tag{3}$$

$$\hat{f'} = (-2i\pi x)\hat{f} \tag{4}$$

On a $f'' \in L^2 \Rightarrow x^2 f \in L^2$.

Cauchy Schwarz :

$$\int |uv| \leq \left(\int |u|^2\right)^{1/2} \left(\int |v|^2\right)^{1/2}$$

Donc

$$\int |f|^2 = \int |x\hat{f}|^2 \leq ||x^2\hat{f}||_2 ||\hat{f}||_2 < \infty$$

avec u=$x^2\hat{f}$ et $v = \hat{f}$.

Question 2.5. *Prouver Riemann Lebesgue*

Réponse On montre par IPP pour une fonction de S, puis on utilise densité de S dans L^1. Le jury m'a demandé de le rédiger proprement.

Question 2.6. *Où apparait le produit de convolution en proba ?*

Réponse X, Y deux va indépendantes, alors la loi de X+Y est le produit de convolution des deux lois.

3 Option A (note : 7)

3.1 Texte

Je n'ai pas pris un texte de stat pure sur la loi de Bendford. Ca avait l'air vraiment vraiment dur (je n'ai même pas compris la première proposition).

Le texte que j'ai pris parlait d'un gendarme G et d'un voleur V; le voleur reste immobile tant que le gendarme ne l'a pas trouvé, puis bouge selon une loi donnée (G et V se déplacent sur un espace d'états dénombrable) (G bouge aussi selon sa propre loi donnée).

Au départ, on suppose que V reste en fait toujours immobile, et on étudie G (je ne me souviens plus trop ce qui se passe, mais on pouvait appliquer la LGN (c'était dans le texte) puis le TCL (c'était sous entendu dans les questions à la fin)).

Puis V se déplace selon un loi π donnée. Alors en gros on sommait ce que l'on venait de faire sur tous les états possibles.

Ensuite on étudiais plus en détail. En gros le couple (G_n, V_n) des positions de G et V à l'étape n forme une chaine de Markov à état dénombrable, et on peut appliquer le théorème ergodique (c'était l'objet du théorème 1).

Puis il y avait un cas particulier sur où l'état est fini, donc on a une matrice de transition avec une forme spéciale (je ne me souviens plus du tout...) et ensuite un exemple avec uniquement deux positions possibles.

Je me suis arrêté là (en gros moitié du texte, 3 page sur 6), je n'ai même pas lu la suite... Mais j'ai quand même tenu 40min à l'oral. J'ai trouvé ça vraiment dur, même plus dur que les textes qu'on a eu dans l'année. Et il n'y avait pas vraiment de questions faciles pour mettre en confiance (même si c'était assez facile de comprendre ce qui se passait; j'aurais probablement du critiquer beaucoup plus le modèle et faire des simus en plus quitte à admettre les résultats donnés dans le texte...). Je ne sais pas si c'est un mauvais tirage ou le stress de l'épreuve (et l'heure de convocation : 6h30 ...).

3.2 Questions

Question 3.1. *Calculer la loi d'une somme de n géométriques indépendantes de paramètre p.*

En gros j'avais mal recopié un bouquin pendant la préparation (il doit y avoir plusieurs définition pour la loi géométrique), d'où la question....

J'ai un peu galéré (il faut compter le nombre de solution à $n_1 + \dots n_k = p$, et je n'ai pas su faire)

Question 3.2. *Pareil pour l'espérance.*

Celle là ça allait.

Question 3.3. *Comment tester l'égalité de deux lois*

Réponse Chi deux si loi discrète ou Kolmogorov. Puis le jury m'a demandé des précisions sur Kolmogorov. J'ai sorti Glivenko Cantelli, et en pratique la fonction de répartition empirique $F_n(x) = \sum 1_{X_i \leq x}$ est une fonction en escalier avec saut de 1/n, on test son écart en norme sup à la fonction de répartition attendue. Si c'est plus grand qu'une constante, on rejette. Mais pour une raison qui m'échappe, ça ne leur a pas suffit, et ils m'ont demandé dans quelles conditions le teste marche et d'autres détails (d'où sort la constance etc) mais j'ai pas vraiment su répondre...

Question 3.4. *Donner la définition de l'irréductibilité et apériodicité d'une chaine de Markov.*

A priori j'ai du bien répondre, et ça a clôturé l'oral.