Leçons d'analyse à l'agrégation

Maximilien Dreveton

23 novembre 2016

Résumé

Ce document regroupe des plans de leçons que j'ai tapé durant mon année de préparation à l'agrégation (2014-2015). Ils sont bien évidement imparfaits, relus par personne (et honnêtement c'est à peine si je me suis relu moi même). En particulier, je ne les ai pas retouchés une fois l'agreg passée. Parmi ces plans, certain sont originaux et ne ressemblent en rien aux plan que l'on peut trouver ailleurs, mais la plupart s'inspirent fortement de plan classiques, déjà fait par les générations d'agrégatifs avant moi. Enfin, et cette remarque est importante, certains plans mentionnent des résultats probablement trop difficiles, que je n'aurai jamais osé présenter à l'oral le jour J.

Afin de faciliter la préparation à l'agreg, j'ai voulu être le plus clair possible, et de mettre autant que possible les références où l'on pompe scandaleusement les énoncés des théorèmes et les exemples classiques. Des passages entiers sont des copiés/collés de bouquins, mais c'est assumé, tout le monde faisant pareil afin de se simplifier la tâche le jour de l'épreuve.

J'espère que document pourra servir de base de travail pour de futurs agrégatifs.

TABLE DES MATIÈRES

LEÇON 201

ESPACES DE FONCTIONS : EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Godemont (tome 1 p.20 pour le speech du début, jusqu'à ce qu'il parte dans un délire avec l'axiome du choix) ; Marco ; Scwartz

Développement Montel ; Riesz-Fischer ; Densité des polynômes orthogonaux ; (Théorème échantillonnage de Shannon) Prohorov (Ref : Cottrel)

Motivation / speech à l'oral Avant : on étudiait les fonctions une par une (en schématisant probablement). Elles étaient donné par une formule ($f(x) = x^2 + 1$ par exemple). Pour les ingénieurs, c'est plutôt le graphe qui est important : le lieu géométrique des points (x,y) où y=f(x), avec f qui est souvent inconnue (résultat de mesure expérimentale).

Dirichlet (1830) introduit l'indicatrice de $R - Q$: en gros, un truc étrange. Idée abstraite émerge : fonction définie sur un ensemble X à valeur dans un ensemble Y ; le graphe est l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times Y$ tel que y=f(x) pour tout x dans X.

Début 20ème (sous la houlette d'Hadamard, en 1898 dans un congrés de matheux) : on voit les fonctions comme point dans un espace (appelé espace fonctionnel). Cette espace possède des propriétés intéressantes (que l'on peut étudier de manière très générale). En effet, pour nous ça sera la plupart du temps un ev, normé (ou au moins une distance !). Des propriétés plus fortes comme la compacité, complétude, produit scalaire (Hilbert) vont se reporter sur les fonctions dans cet espace, rendant leur étude plus simple : Fourier dans L^2, ou au moins décomposition dans une base hilbertienne ; point fixe dans complet (Cauchy Lipschitz).

I Propriété de l'espace sous jacent et héritage sur $\mathcal{F}(E, F)$

I .1 Topologie, métrique

(E,T) espace topologique, (F,d_F) espace métrique.

Définition 1. *$C^0(E, F)$, topologie de la convergence simple.*

Rq : pas métrisable si E n'est pas dénombrable. L'espace C^0 muni de cette topo n'est pas complet (même si F l'est). Limite simple de fonction continue n'est pas forcément continue.

Théorème I .1. *TVI. f continue, I connexe, alors f(I) connexe.*

Application : méthode de la dichotomie.
Rq : th Darboux.
Rolle, Inégalités accroissements finis ?

Définition 2. *Convergence uniforme.*

Proposition I .2. *Si F est complet, $(C^0(E, F), ||.||_\infty)$ est complet. C'est en outre un evn : donc Banach.*

Proposition I .3. $(C^0, ||.||_\infty)$ *est complet. Par contre pas les* $(C^k, ||.||_\infty)$ *(on doit changer la norme en* $||.||_{C^k}$*)).*

Définition 3. *Espaces L^p sont normés (Holder + Minkovski). (rajouter complet ici ?)*

Inclusion les uns dans les autres

Proposition I .4. *Espaces C^k sont décroissants pour l'inclusion.*

Proposition I .5. *Si la mesure est finie, les L^p sont emboités.*
Les l^p sont emboités, mais dans l'autre sens.

Exemple : en probabilité.

I .2 Compacité, complétude de E ou F

Compacité de l'espace de départ

Théorème I .6. *Heine Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Théorème I .7. *Stone Weierstrass : condition de densité dans $(C^0(E, \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ (E compact) pour une famille de fonctions.*

Théorème I .8. *Dini*
(E,d) métrique compact. Alors toute suite croissante (f_n) de fonctions qui converge simplement vers f continue est uniformément convergente.

Compacité de l'espace d'arrivée

Théorème I .9. *Helly, Prohorov. [ref : Cottrel]*

Complétude

Théorème I .10. *Point fixe de Picard*

Théorème I .11. *Cauchy Lipschitz global*

Théorème I .12. *Inversion locale (éventuellement).*

Théorème I .13. *Prolongement d'application*
Si F complet et A partie dense de E (métrique), alors il existe un unique prolongement de f sur E. De plus, g est unique. (à mettre plus loin ?)

Exemple : TF dans L^2.

I .3 Structure des espaces E,F

Applications linéaires entre evn $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux evn.

Proposition I .14. *$f : E \to F$ linéaire. Equivalence :*
1/ f continue
2/ f continue en 0
3/ f lipschitzienne
4/ f bornée sur $\overline{B}_E(0, 1)$.

Proposition I .15. *$L_c(E, F)$ ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F. Alors $|||f||| = \sup_{x||_E=1} ||f(x)||_F$ est une norme sur $L_c(E, F)$, qui est complet si F l'est.*

On rappelle qu'un espace métrique complet vérifie la propriété de Baire.

Théorème I .16. *Banach Steinhaus*

Application : série de Fourier divergente.

Théorème I .17. *Hahn Banach, cas séparable (pour éviter axiome du choix).*

II Propriété(s) de $\mathcal{F}(E, F)$

II .1 Compacité

Ici (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques.

Définition 4. *Une partie A de $C(E, F)$ est dite équicontinue en $x \in E$ si $\forall \epsilon \exists\ \alpha > 0 : \forall y \in E\ d_E(y, x) < \alpha$ on a $\forall f \in A d_F(f(y), f(x)) < \epsilon$.*

Théorème II .1. *Ascoli*
(E, d_E) espace métrique compact et (F, d_F) métrique complet. On considère $C(E, F)$ muni de la distance uniforme. Soit A partie de $C(E, F)$. Alors :

$$\text{A relativement compacte} \iff \begin{cases} \text{A équicontinue et} \\ \forall x \in E\ A_x := \{f(x) f \in A\} \text{ relativement compacte dans F} \end{cases}$$

Définition 5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$.*

Théorème II .2. *Montel*
Soit $F \in H(\Omega)$. Alors :
F relativement compacte $\iff$ F uniformément bornée sur tout compact.

II .2 Complétude

Théorème II .3. *Les espaces L^p pour $1 \leq p \leq \infty$ sont complets. (Ce sont des Banach)*

II .3 Densité

Utilisation de la convolution

Définition 6. *Approximation de l'unité*

Théorème II .4. *Si f uniformément continue et $u_n \in C_C^\infty$, $f * u_n$ converge uniformément vers f sur tout compact.*
Si $f \in L^p$, convergence aussi en norme p.

Corollaire II .5. *C_c^∞ dense dans L^p pour $1 \leq p < \infty$.*

Application : Lemme de Riemann Lebesgue

II .4 Isomorphisme entre espaces

Transformation de Fourier sur S, L^2

II .5 Base Hilbertienne

Base Hilbertienne sur $L^2(I)$

Base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ via polynômes orthogonaux et polynômes de Hermite.

III Classe d'espace de fonctions au programme

IV Extension de la notion de fonction : distributions tempérées

IV .1 Espace de Schwartz

On se restreint d'abord à S (espace "petit"), pour plus tard étendre la TF à S' (espace beaucoup plus gros)

Définition 7. *On dit que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $\phi \in C^\infty$ et ϕ est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.*
Cad les

$$N_p(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_\infty$$

sont finies pour tout p.

Rq : $C_0^\infty \subset S \subset C^\infty$
$P(x) \exp(-x^2) \in S$ où P est un polynôme.

Définition 8. *S est stable par dérivation et multiplication par des polynômes. Les fonctions de S sont dans L^1 et tendent vers 0 en l'infini, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$\forall \phi \in S \qquad \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_{L^1} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi)$$

Théorème IV .1. *1/ La TF applique S dans lui même, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$N_p(\hat{\phi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\phi)$$

2/ La TF est un isomorphisme de S dans lui même d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$

Lemme IV .2. *$\phi \in S$. Alors $\hat{\phi} \in C^1$ et :*

$$\partial_j(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}(-2\pi i x_j \phi(x))$$

$$\mathcal{F}(\partial_j \phi) = i2\pi\xi_j \hat{\phi}(\xi)$$

IV .2 Espace des distributions trempérées

Définition 9. *S' le dual topologique de S. Pour $T \in S'$ et $\phi \in S$, on note $< T, \phi >$ au lieu de $T(\phi)$.*

Lemme IV .3. *Une application linéaire est dans S' ssi*

$$\exists p \in \mathbb{N}, C > 0 : \forall \phi \in S, | < T, \phi > | \leq C N_p(\phi)$$

Définition 10. *Le plus petit p vérifiant le lemme s'appelle l'ordre d'une distribution tempérée T.*

Exemples : fonctions L^p, δ_x, vp(1/x) sont dans S'.

Définition 11. *Dérivation dans S' : $< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$*

IV .3 TF dans S'

[Bony]

Définition 12. $T \in S', < \hat{T}, \phi >=< T, \hat{\phi} >$

Proposition IV .4.

$$\forall T \in S' \quad \hat{T} \in S'$$

Proposition IV .5. *Si $f \in L^1$, alors $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$*

Théorème IV .6. *La transformation de Fourier est un homéomorphisme de S' dans S'.*

Proposition IV .7. *$\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ est une distribution tempérée. On a par la formule de Poisson $\hat{\Delta} = \Delta$.*

Théorème IV .8. *Théorème d'échantillonnage de Shannon (Développement)*
$f \to f\Delta$ est injective sur BL^2 et

$$f = \mathcal{F}^{-1}(1_{[-1/2,1/2]}\hat{f\Delta})$$

(La multiplication de f par Δ revient à échantillonner f avec une fréquence constante. Le théorème précédent assure qu'après échantillonnage, on peut retrouver la fonction de départ avec à condition que la fréquence d'échantillonnage ne soit pas trop faible)

IV .4 Application à la résolution d'EDP

Définition 13. *$u \in S'$ $\phi \in S$. Alors leur produit de convolution est :*

$$(u * \phi)(x) =< u(y), \phi(x - y)$$

et est dans l'ensemble des fonctions C^∞ à croissance au plus polynômiale en l'infini.
De plus, $\partial^\alpha(u * \phi) = u * (\partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi$

Soit f une distribution tempérée. On s'intéresse aux équations aux dérivées partielles à coefficients constant :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \tag{201.1}$$

Définition 14. *$E \in S'$ est solution fondamentale de 240.1 si :*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0 \tag{201.2}$$

Intérêt : Si on a trouvé une telle solution E (pas forcément unique), alors $(E * f)$ solution de 240.1. (calcul facile).
Une manière de procéder est de prendre la TF de 240.2, qui devient alors :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (2i\pi\xi)^\alpha \hat{E}(\xi) = 1 \tag{201.3}$$

ie $P\hat{E} = 1$ où $P(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (2i\pi\xi)^\alpha$.
Si 1/P est une distribution tempérée, on peut poser : $E = \mathcal{F}^{-1}(1/P)$ et on obtient une solution fondamentale.
Application : Équation de la chaleur (développement)

LEÇON 202

EXEMPLES DE PARTIES DENSES ET APPLICATIONS.

Références Gourdon (algèbre et analyse), Hirsch Lacombe, OA, Rudin, Rouvière (pour la différentielle du determinant), Candelpergher

Développements

- Densité polynômes orthogonaux
- Equation chaleur via séries de Fourier

Rapport jury (2015) Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme par exemple les sous-groupes de R et leurs applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximations de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Au delà des exemples classiques, les candidats plus ambitieux peuvent aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles par séries de Fourier.

Motivation / speech à l'oral Prérequis : notions de partie dense et espaces séparable. Théorème de prolongement des application uniformément continues sur un sous espace dense.

I Exemples de parties denses dans les espaces de dimension finie

I .1 Dans R

Caractérisation des parties denses de R. Exemples : Q et R privé de Q.
Sous groupes additifs de R

I .2 Dans $M_n(K)$

K=R ou C
On a densité de $GL_n(C)$, $D_n(C)$ (matrices diagonalisables) dans $M_n(C)$.
Appli : $\chi(AB) = \chi(BA)$, Cayley Hamilton, différentielle du déterminant
Problème dans R (autour d'une matrice de rotation, pas de matrices trigonalisable).

I .3

II Densité dans les L^p

On peut aussi parler de densité des fonctions étagées

II .1 Convolution et approximation de l'unité

Voir Bony ou Willem
Appli : densité de C_c^∞ (donc de S !) dans tous les L^p
Appli : Lemme de Riemann Lebesgue.
Appli :$L^p \cap L^q$ dense dans L^p.
Appli : $1 \leq p < \infty$ L^p est séparable.

II .2 Application : TF

On définit la TF dans S et L^1, on l'étend à L^2 (en une isométrie), et on vérifie que c'est la même chose sur $L^1 \cap L^2$.

II .3

III Base hilbertienne

III .1 Def

Caractérisation densité d'un sev, def Base de Hilbert, caractérisation de la densité d'une base de Hilbert.
Egalité de Bessel.

III .2 Exemple de base hilbertienne : Polynômes orthogonaux, séries de Fourier ; Procédé de Schmidt

$E = l^2(I)$; la famille des $(e_j)_{j\in I}$ où $e_j = \delta_{ij}$ est une base hilbertienne de $l^2(I)$

Séries de Fourier [Candelpergher]

Théorème III .1. *Les fonctions $e_n : x \to \exp(2i\pi nx)$, $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hermitienne de l'espace $L^2]0,1[$.*

On note $c_n(f) = (e_n|f) = \int_0^1 \exp(-2i\pi nx)f(x)dx$ et $S_N(f) = \sum_{-N}^N c_n(f)e_n$. On a

$$f \in L^2]0,1[\quad ||S_n(f) - f||_2 \to 0 \quad \text{quand } N \to +\infty$$

Théorème III .2. *Si $f \in L^2]0,1[$, alors la suite des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$ et on a la relation de Parseval :*

$$||(c_n(f))||_2^2 = \sum |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2$$

Application : calcul de sommes du genre $\sum 1/n^2$ comme séries de Fourier de fonctions bien choisies (ici fonction identité sur $[-\pi, \pi]$, 2π périodisée)...
Rq : Il y a convergence dans L^2, par contre en général pas convergence ponctuelle et/ou uniforme.

Gram Schmidt, application : polynômes orthogonaux

Définition 15. *Soit ρ une fonction poidsde I dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ munie du ps

$$(f|g)_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

C'est un Hilbert.

Théorème III .3. *Soit ρ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel*

$$\int_I \exp(\alpha|x|)\rho(x)dx < +\infty$$

La famille (X^n) est dense dans $L^2(I,\rho)$. On peut l'orthonormaliser via le procédé de Schmidt, pour avoir une base Hilbertienne, appelée base des polynômes orthonormaux.

Exemple : Soient $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = \exp(-x^2)$, les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Hermite : $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2))$
Application : base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ via les fonctions de Hermite ($P_n(x) * \exp(-x^2)$ où P_n sont les polynômes de Hermite.
Rappel :

Théorème III .4. *Procédé de Schmidt*
Soit (f_n) une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale (e_n) de E telle que $\forall n$ les familles $(e_p)_{0\leq p\leq n}$ et $(f_p)_{0\leq p\leq n}$ engendrent le même sev de E.

Démonstration. Une telle famille peut être construite par récurrence. □

IV Densité dans les espaces de fonction continues

IV .1 Fonction continues à support compact

Weierstrass, Stone Weierstrass.

IV .2 Série de Fourier et convergence ponctuelle

Sortir les conditions pour qu'une fonction soit somme de sa série de Fourier.
Application : équation de la chaleur.
On peut caser Banach Steinhaus ici (avec l'appli aux séries de Fourier).

LEÇON 203

UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACITÉ.

Références Schwartz

Motivation / speech à l'oral Compacité notion fondamentale en analyse. On la rencontre très tôt (terminale) via TVI, même si on ne le dit pas forcément. Ensuite tous les ans on voit de nouveaux théorèmes utilisant la compacité : Rolle, BW, Heine (2eme partie). Jusqu'à des théorèmes très puissant (3ème partie en gros) : Ascoli, Montel, Stone Weierstrass

Choix : pas mis Cauchy Lipschitz pck c'est un théorème avant tout de complétude (mais il aurait probablement eu sa place dans la leçon, en insistant par ex sur lemme de sortie de tout compact, ou Gronwald).

I La notion de compacité

I .1 Utilisation de BL (Dans un espace topologique)

[Marco]

Définition 16. *Recouvrement ; Borel-Lebesgue*

Hyp séparé essentielle : espace avec topo grossière n'est pas compact, mais vérifie BL.

R pas compact. (recouvrement par $]n-1, n+1[$) De même, R^n ou un evn (dim finie ou infinie) ne sont jamais compact (prendre les boule ouverte certe O rayon > 0). Plus généralement, une partie non bornée d'un espace métrique est non compact.

Théorème I .1. *Passage au complémentaire dans BL : intersection de fermée vide implique il y a une intersection finie vide.*

Rq : notion de compacité stable par homéomorphisme.

Théorème I .2. *E espace topo séparé, F partie compacte de E. Alors F partie fermée de E.*

Théorème I .3. *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

I .2 Dans espace métrique : Bolzano Weierstrass

Théorème I .4. *E métrisable, a point adhérent à $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \iff$ on peut extraire de (x_n) une sous suite convergeant vers a.*

Théorème I .5. *E métrisable. E compact $\iff$ toute suité d'éléments de E admette au moins un point adhérent.*

Théorème I .6. *E compact. Pour qu'une suite d'éléments de E soit convergente vers a, il faut et suffit qu'elle admette a comme seul point adhérent.*

Rq : faux sur R...

Théorème I .7. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces topologiques métrisables compacts est mérisable compact.*

Rq : vrai pour produit quelconque, mais plus dur à démontrer...

Parler de localement compact

I .3 Dans un evn

[Marco p.123]

Théorème I .8. *(Riesz) evn localement compact ssi dimension finie.*

Corollaire I .9. *evn dim finie ssi la boule unité fermée est compact.*

Corollaire I .10. *Compacts d'un evn dim finie sont exactement les fermés bornés.*

Démonstration. Dans métrique, compacts sont fermés et bornés.

Réciproque, soit K fermé borné de E. Alors K inclu dans une boule fermée centre 0, rayon r, qui est l'image par homothétie de la boule fermée centre 0 rayon 1, qui est compact par Riesz. Donc K fermé inclu dans un compact, donc compact. □

II Principales applications

II .1 Atteinte de borne : Utilisation de BL

[Testard]

Théorème II .1. *Soit K compact et f continue de K dans F séparé. Alors f(K) est compact.*

Démonstration. BL à $f^{-1}(O_i)$ où O_i recouvrent K. □

Corollaire II .2. *E compact, F séparé, f continue injective de E dans F. Alors f homéomorphisme de E sur f(E).*

Proposition II .3 (Gourdon)**.** *(E,d) métrique compact $f : E \to E$ continue vérifiant*

$$\forall x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Alors f admet un point fixe

Démonstration. Unicité directe.

Pour l'existence, de manière théorique $x \to d(x, f(x))$ est continue donc admet un min α. Nécessairement $\alpha = f(\alpha)$.

De manière constructive, poser $x_{n+1} = f(x_n)$ avec x_0 quelconque. et modulo extraction (BW) cette suite converge vers x.

Ensuite posons $u_n = d(\alpha, x_n)$, cette suite décroit, minorée par 0 donc converge vers l. Modulo l'extraction de x_n, on a l=$d(\alpha, x)$.

Si $\alpha \neq x$ ie $l \neq 0$ contradiction avec la prop f strictement contractante. □

Théorème II .4. *Rolle*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, b[$ *telle que f(a)=f(b). Alors il existe c tel que f'(c)=0.*

Rolle généralisable pour fct de plusieurs variables à valeur dans R MAIS PAS pour fct d'une variable réelle à valeur dans C (ex : $\exp(it)$). Exo : Si f admet n+1 zéros et est n foi dérivable, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Csq : accroissement finis ; Taylor Lagrange.

II .2 Principe de la dichotomie

Théorème II .5. *TVI* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Si* $y \in [f(a), f(b)]$*, il existe* $c \in [a, b]$ *tel que f(c)=y*

Démonstration. Si y=f(a) ou y=f(b) c'est plié.

Sinon supposons par ex $f(a_0) < y < f(b_0)$. Posons $m = (a_0 + b_0)/2$, soit f(m)=y et c'est bon, sinon par ex $f(a_0) < f(m) < y$. Dans ce cas posons $a_1 = a_0$, $b_1 = m$.

On itère : on a deux suites (a_n) croissante et(b_n) décroissante, leur différence tendant vers 0 car $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$.

Donc elles sont adjacentes donc convergent vers la même limite c vérifiant f(c)=y (car f continue). □

Corollaire II .6. *Point fixe.* $f : [a, b] \to [a, b]$ *continue admet un point fixe.*

II .3 Renforcement convergence, limite

Théorème II .7 (Marco p.81)**.** *Heine*
E compact, F métrique, f continue de E dans F. Alors, f est uniformément continue.

Démonstration. On a l'existence de α_x tels que $f(B(x, \alpha_x)) \subset f(x, \epsilon/2)$. Alors $(B(x, \alpha_x/2))_{x \in E}$ recouvre E.
Soit A finie telle que $(B(x, \alpha_x/2))_{x \in A}$ soit un sous recouvrement fini.
Posons $\alpha := min(\alpha_x, x \in A)$ et soit (y,z) dans E tel que $d(y, z) < \alpha/2$. Alors il existe x dans A tel que $y \in B(x, \alpha_x/2)$ et on a (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq \alpha_x/2 + \alpha_x/2$. Donc f(y) et f(z) sont dans $B(f(x), \epsilon/2)$ donc $d(f(y), f(z)) < \epsilon$. ☐

Théorème II .8. *Dini*
E métrique compact. Alors toute suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers f continue est uniformément convergente.

Démonstration. BL ☐

II .4 Extraction de suites : BW et procédé diagonal

Théorème II .9. *Tychonoff*

Théorème II .10. *Helly et Prokhorov*

Démonstration. BW + procédé diagonal. ☐

III Des théorèmes de compacité

III .1 Critère de compacité sur un ensemble de fonctions continues

Définition 17 (Marpco p.145)**.** *Famille équicontinue de fonctions*

Définition 18. *A relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Théorème III .1. *Ascoli*
E métrique compact, F métrique complet, C(E,F) fonctions continues de E dans F avec convergence uniforme.

$$\text{A relativement compacte} \iff \text{A équicontinue et } A_x := \{f(x) : f \in A\} \text{ relativement compacte dans F}$$

Démonstration. Utilise précompact ssi relat compacte dans complet. ☐

Théorème III .2. *Montel*

Démonstration. exhaustion compacte + Ascoli + BW + procédé diagonal. ☐

III .2

III .3

IV Vrac

Théorème IV .1. *Un intervalle fermé borné de R est compact.*

Théorème IV .2. *La droite achevée $\overline{R}$ muni topo naturelle est compact. Idem pour $\overline{N}$ ou $\overline{Z}$.*

Théorème IV .3. *E métrique, tout compact est borné et fermé. Réciproque vrai ssi les boules fermées de E sont compactes.*

Localement compact : tout point admet un voisinage dont l'adhérence est compacte.
(métrique) Précompact : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ϵ.

LEÇON 204

CONNEXITÉ. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Schwartz

Motivation / speech à l'oral Connexité : idée intuitive espace en un seul morceau, d'où la définition.

Quand on dessine, on a l'impression que tous les points sont connectés (d'où le nom connexe), mais en fait c'est la connexité par arc, qui est une notion plus forte. Donner et tracer un contre exemple.

Néanmoins, elles coïncident dans evn, et connexité par arc pratique, notamment pour les groupes matriciels. Motiver le développement exp matricielle.

La dernière idée est une appli continue d'un connexe à valeur dans un espace discret comme $\{0, 1\}$ est constante. Illustration dans le second dvt (Gersgorin), avec une application continue partant de [0,1] qui compte le nombre de valeurs propres dans un espace du plan complexe (un disque).

Puis énoncer le plan plus en détail.

Développement Gersgorin (Serre Matrices et Varga, Gersgorin and his circles).

exp matricielle

I Espaces connexes

I .1 Définition

[Gourdon]

Proposition I .1. *Équivalence :*
(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vide
(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vide.
(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont E et vide.

Définition 19. *Un espace topologique vérifiant l'une de ces assertions est dit connexe.*

Q n'est pas connexe. R l'est.

Proposition I .2. *(Caractérisation pratique)*
(E,d) connexe ssi toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ *est constante.*

Théorème I .3. *Les connexes de R sont les intervalles (fermés, ouvert ou semi-ouvert on s'en fiche).*

I .2 Image d'un espace connexe. TVI

[Schwartz]

Théorème I .4. $f : (E, d) \to (E, d')$ *continue. Si E connexe, f(E) l'est aussi.*

Démonstration. Soit A dans f(E) partie ouverte et fermée, alors $f^{-1}(A)$ l'est aussi car f continue, donc est E ou vide (car E connexe). Donc A est f(E) ou vide. □

Corollaire I .5. *TVI (la même qu'avant mais sur R)*

Rq : TVI ne caractérise pas les fonctions continues. Contre exemple : $f(x) = sin(1/x)$ f(0)=0.
Par contre réciproque :

Théorème I .6. *Si toute fonction réelle continue sur E vérifie le TVI, alors E est connexe.*

Démonstration. Si E n'était pas connexe, soit A,B partition de E. Alors soit f la fonction réelle prenant la valeur 0 sur A et 1 sur B. L'image réciproque par f de tout ouvert de R serait soit vide, soit A, B ou E, donc f est continue. Mais elle ne vérifie pas le TVI ! contradiction. □

Amélioration du TVI : Th de Darboux (f dérivable, alors f' vérifie TVI)

I .3 Espaces non homéomorphes

Si E et F sont homéomorphe et E connexe, alors F aussi. Donc plein d'espaces ne sont pas homéomorphes juste par des conditions de connexité.

II Connexité par arc

II .1 Connexité par arcs

Définition 20.

Exemple : Un evn, ou une boule, sphère dans evn sont connexes par arcs.

Théorème II .1. *X connexe par arc $\Rightarrow$ X connexe*

Proposition II .2. *Tout ouvert non vide connexe d'un evn est connexe par arcs.*

Contre exemple : $\{(x, sin(1/x) : x \in]0, 1])\} \cup \{0 \times [-1, 1]\}$ connexe non connexe par arcs.

II .2 Utilisation pratique : groupes matriciels

Proposition II .3. *$GL_n(C)$ est connexe par arc.*
$S0_n(K)$ est connexe par arc (K=R ou C).

Théorème II .4.

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$$
$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = GL_n^+(\mathbb{R})$$

Corollaire II .5. *$GL_n^+(R)$ est connexe par arc (image de Mn(R) par exp continue)*

II .3 Composantes connexes

Définition 21. *On dit que deux points sont connecté s'il existe une partie connexe les contenant.*

Théorème II .6. *C'est une relation d'équivalence.*

Définition 22. *Une classe d'équivalence de E par rapport à la relation d'équivalence "x et y sont connectés" s'appelle une composante connexe de E. E est alors réunion disjointe de ses composantes connexes.*

Théorème II .7. *La composante connexe de x de E est la plus grande partie connexe de E contenant x. Les composantes connexes de E sont fermées.*

Exemple : $O_n(K)$ a deux composantes connexes homéomorphes.

III Importance de la connexité en analyse complexe

Jordan, Ghesghorin, Liouville, D'Alembert, ppe maximum, lemme de Schwarz

III .1 Prolongement analytique sur ouvert connexe

LEÇON 205

ESPACES COMPLETS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Gourdon, Brézis, Schwartz, Hirsh Lacombe (pour Hilbert)

Développements

— L^p est complet

— Cauchy Lipschitz

— Banach Steinhaus

— Projection sur convexe fermé dans Hilebrt

Rapport jury (2015) Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Le théorème de Cauchy-Lipschitz, mal maîtrisé par beaucoup de candidats, est un point important de cette leçon. Les espaces Lp sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles. On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est réservée aux candidats solides.

Motivation / speech à l'oral $\mathbb{Q}$ pas complet. Suite de Cauchy (faire dessin)

On n'a pas (plus) besoin de connaitre la limite pour montrer qu'une suite converge !

I Espaces métriques complets

I .1 Suites de Cauchy

I .2 Espaces métriques complets

I .3 Complétion

II Thm point fixe de Picard

Application : Inversion locale ; fonctions implicites
Cauchy Lipschitz global (développement)

III Théorème de Baire

Application : Banach Steinhaus + exemple série de Fourier divergente.

IV Espaces de Hilbert

Définition, exemples.

IV .1 Projection sur convexe fermé

IV .2 Base Hilbertienne

LEÇON 206

THÉORÈMES DE POINT FIXE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Rouvière, Testard (Analyse mathématique ; maitrise de l'implicite), Hauchecorne (contre exemples)

Développements

— Cauchy Lipschitz
— Newton (Ciarlet, Rouvière)
— Cantor (Schwartz, Rouvière)

Rapport jury (2015) Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses des théorèmes énoncés . Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue.

Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.

Pour les candidats solides, il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius.

Motivation / speech à l'oral

I Point fixe et complétude

I .1 Théorème de Picard

On a une convergence géométrique de la suite vers le point fixe.

I .2 Application en calcul diff

[Rouvière]
Théorème d'inversion locale, fonctions implicites. Exemples

I .3 Applications en équations différentiels

Cauchy Lipschitz (dvt)
Exemple pendule simple ; équations autonomes (y'=f(y) + CI) : les trajectoires ne se coupent pas.

I .4 Analyse Hilbertienne

Lax Milgram

Rq : en fait Stampacchia est un thm de point fixe, mais Lax Milgram non ? (se démontre plus élémentairement). A voir si ça vaut le coup de ne parler que de Lax Milgram...

Exemple pour Lax Milgram : $I =]0,1[$, $f \in L^2(I) \cap C^0$

$$u'' + u = f \quad \text{avec} \quad u(0) = 0 = u(1)$$

$\forall v \in C_0^k(I)$ tel que $v(0) = v(1) = 0$ $\quad \int_I -u''v + uv = \int fv \Rightarrow \int (u'v' + uv) = \int_I fv(*)$
Posons $a(u, v := \int_I u'v' + uv$ et $\phi(v) := \int_I fv$.
Alors (LM) : $\exists! u \in H_0^1(I)$ tel que u vérifie (*).

II Point fixe et compacité

II .1 Un théorème

Picard pour un compact ; hypothèse un peu plus faible

II .2 Théorème de Brouwer

Ne parler que de la dimension 1 si on n'a pas d'application et si on ne le propose pas en développement ?

II .3

III Point fixes et méthodes itératives

III .1 Etudes des points fixes

Attractif, répulsif, recasage dvt fonction tente itérées et lien avec l'ensemble de Cantor.

III .2 Point fixe et F(x)=0

Recasage Newton.

III .3 Equation linéaires : méthodes itératives

LEÇON 207

PROLONGEMENT DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Gourdon, ZQ, Testard

Développements

— Borel

— Polynômes orthogonaux

— Shannon

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral La question du prolongement arrive naturellement. On peut prolonger par 0, mais dans ce cas on perd toutes les propriétés de la fonction initiale...

Pour garder les régularités, il faut être plus intelligent. Exemple simple continu ou dérivable : c'est un peu du cas par cas. En revanche, si DSE on a direct fonction prolongée aussi DSE ; exemple avec sint/t (ou même à deux variables $(x, t) \to sin(xt)/(xt)$: ce sont des propriétés de rigidité qui assurent des conditions fortes sur le prolongé.

D'où les deux parties du plan.

Développement limite, bien les justifier à l'oral...

I Prolongement conservant la régularité

I .1 Prolongement et continuité

Prolongement ponctuel

Prolongement par densité Application : Fourier Plancherel. Espérance conditionnelle en proba.

Prolongement global

Théorème I .1. *Tietze-Urysohm.*

I .2 Prolongement et dérivabilité

Théorème I .2. *Thm prolongement dérivable*

Exemple : $f(x) = 1_{\mathbb{R}_*^+} \exp(-1/x)$ est C^∞.
Application : fonctions plateau (voir Rouvière par exemple).

Théorème I .3. *Borel*

Application : prolongement de fonctions C^∞.

I .3 Equations différentielles

Cauchy Lipschitz local, raccord, lemme de sortie de tout compact.
Cauchy Lipschitz global.

II Propriétés de régularité facilitant le prolongement

II .1 Formes linéaires

Théorème II .1. *Hahn Banach*
Soit (E,μ) un evn séparable, et M sev de E. Alors toute forme linéaire continue M sur M se prolonge à E avec la même norme.

La preuve se base sur le lemme :

Lemme II .2. $f : M \to \mathbb{R}$ *linéaire,* $f(x) \leq \mu(x) \forall x \in M$.
Alors $\forall z_0 \notin M$, $\exists f_0 : M \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ *prolonge f et* $f_0 \leq \mu$.

Rq : changer x en -x donne $|f| \leq \mu$.

Démonstration. Preuve Hahn Banach
1/ $\exists (e_i)$ libre telle que $E = \overline{Vect(e_j, j \in \mathbb{N})}$.
Partir de (f_k) suite dense de E. Construire (e_i) telle que :
e_1 = premier vecteur non nul de la suite (f_k).
e_i : premier vecteur restant dans la suite des (f_k) non combinaison linéaire des e_i déjà construits.
La suite (e_i) est libre par construction, et $Vect(e_i) \subset (f_k)_k$, donc $\overline{Vect(e_i)} \subset \overline{(f_k)_k} = E$.
2/ f se prolonge à $E \oplus Vect(e_j, j \in \mathbb{N})$
(lemme + récurrence)
3/ Passer à l'adhérence □

II .2 Analycité, fonctions holomorphes

Prolongement analytique
Application polynômes orthogonaux (recasage développement, un peu limite quand même...)
Parler des séries entière et de ce qui peut se passer au bord de convergence.

LEÇON 208

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES. EXEMPLES.

Références Schwartz, Marco, (Gourdon)

Développements

— Cauchy Lipschitz (Marco ?)

— Lp Banach (Bony)

— Banach Steinhaus (Gourdon, Marco)

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral

I Esppaces vectoriels normés

[Marco] normes, normes équivalentes. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Exemple les normes p (en dimension finie).

Contre exemple en dimension infinie de normes non équivalentes.

Théorème I .1. *Riesz*
E evn tel que B(0,1) est compact. Alors E est de dimension finie.

II Applications linéaires continues

[Marco] $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux evn.

Proposition II .1. *$f : E \to F$ linéaire. Equivalence :*
1/ f continue
2/ f continue en 0
3/ f lipschitzienne
4/ f bornée sur $\overline{B}_E(0, 1)$.

Proposition II .2. *$L_c(E, F)$ ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F. Alors $|||f||| = \sup_{x||_E=1} ||f(x)||_F$ est une norme sur $L_c(E, F)$, qui est complet si F l'est.*

Théorème II .3. *f linéaire. f continue ssi Ker f est fermé*

Proposition II .4. *Si E de dimension finie, toute application linéaire est continue.*

Proposition II .5. *F Banach alors $L_C(E, F)$ est un Banach (En particulier E' est un Banach)*

Faux en dimension infinie, prendre la dérivation de $(C^1([0, 1]), ||.||_\infty)$ à $(C^0([0, 1]), ||.||_\infty)$

III Espaces de Banach

III .1 Définitions

Définition 23. *Banach = evn complet*

Exemple : I intervalle (ou compact) $(C^0(I), ||.||_\infty)$ est un Banach, ainsi que $(C_c^0(\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ (continues à support compact)

Théorème III .1. *E evn. E banach ssi toute série normalement convergente est convergente*

Exemple / Application : $(L^p, ||.||_p)$ est un Banach.

Proposition III .2. *E evn dimension finie. Alors E est complet.*

Proposition III .3. *F Banach alors $L_c(E, F)$ est Banach. En particulier, E' (dual topologique) est toujours un Banach.*

Théorème III .4. *Lemme de Baire*

III .2 Applications continues entre Banach

Théorème III .5. *Banach Steinhaus*

Application : séries de Fourier d'une fonction continue divergente en 0

Théorème III .6. *Théorème de l'application ouverte*

Théorème III .7. *Théorème du graphe fermé*

Théorème III .8. *Point fixe dans Banach (vrai dans métrique complet)*

Application : Cauchy Lipschitz global.

IV Espaces de Hilbert

IV .1 Préhilbertien

Projection sur convexe complet

IV .2 Hilbert

Exemple : L^2, $l^2(\mathbb{N})$.
Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel fermé ; application espérance conditionnelle + vecteurs gaussiens

LEÇON 213

ESPACES DE HILBERT. BASES HILBERTIENNES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence :

— Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
— Schwartz, Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle
— Marco, L3 Analyse

Motivations : [Marco p.321]

Généraliser la notion d'espace euclidiens (ev réel de dimension fini muni d'un ps).

Exemple : $\mathbb{R}^2$ muni du ps usuel. Pour le généraliser, on va définir un ps du genre $(x, y) = \sum x_k y_k$, mais la somme n'est pas finie. Si on se limite aux suites p.p nulles (ie polynômes), l'espace obtenu n'est pas complet. La complétude est utile lorque l'on souhaite projeter. Son complété est en fait $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, ie les suites de carré intégrable. On a découvert notre premier espace hilbertien (ev normé, ps, complet).

La notion de base Hilbertienne s'appréhende en construisant différemment un Hilbert.

Dans la leçon, E=K ev (K= R ou C).

I Géométrie en dimention infinie

[Marco, Hirsch-Lacombe]

I .1 Des théorèmes bien connus

Définition 24. *Produit scalaire (u,v) = forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique (ou hermitienne) définie positive. Espace préhilbertien (réel ou complexe)*

Proposition I .1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz ; Cas d'égalité*

Conséquence : $||u|| = (u, u)^{1/2}$ définit bien une norme.

Proposition I .2. *Identité du parallélogramme*

Définition 25. *Orthogonalité de deux vecteurs. Orthogonal $A^\perp$ d'une partie A de H.*

Proposition I .3. *Quelques relations sur l'orthogonal de A.*

— $B \subset A$*, alors* $A^\perp \subset B^\perp$
— $A \subset (A^\perp)^\perp$
— $\overline{A}^\perp = A$
— $A^\perp = vect(A)^\perp = \overline{vect(A)}^\perp$
— $\overline{vect(A)} \bigcap A^\perp = \{0\}$

Proposition I .4. *Pythagore*

Définition 26. *Un Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un p.s $(.|.)$ (définissant alors une norme $||.||$), tq l'evn (H,$||.||$) soit complet.*

Proposition I .5. *H (Hilbert) est uniformément convexe, donc réflexif.*

Démonstration. Brézis, p.79 $\epsilon > 0, u, v \in H$ tq $|u| < 1$ $|v| < 1$ et $|u-v| > \epsilon$. Identité du parallélogramme : $|\frac{u+v}{2}| \leq 1-\epsilon^2/4$ et donc $|\frac{u+v}{2}| < 1-\delta$ avec $\delta = 1-(1-\epsilon^2/4)^{1/2}$

On a Banach + uniformément convexe ⇒ réflexif (Brézis p.51). □

Proposition I .6. *Complété hilbertien*

Soit $(H_0, (.|.)_0)$ un K ev muni d'un ps. Soit $(H, ||.||)$ le complété de H_0 pour la norme $||.||_0 = \sqrt{(.|.)_0}$ sur H_0. Alors H peut être muni d'un ps $(.|.)$ tel que $(.|.)_{H_0 \times H_0} = (.|.)_0$ et tel que la norme associé à ce ps soit la norme $||.||$ sur H. L'espace de Hilbert $(H, (.|.))$ ainsi obtenu est appelé le complété hilbertien de $(H_0, (.|.)_0)$.

Exemple :
l^2 complété des suites pp nulle. [Marco]
L^2 complété de l'ev des fonctions $C^1[-1,1]$ muni du ps $(f|g) = \int f\bar{g}$. [Schwartz]
L'espace de Sobolev H^1 est le complété de $C^1[-1,1]$ muni du ps $(f|g) = \int f\bar{g} + f'\bar{g}'$ [Cattiaux]. Si on rajoute la condition f(-1)=f(1)=0, on a H_0^1

Ces deux derniers exemples montre qu'en changeant de norme, on change de complété.

I .2 Importance de la complétude : projection orthogonale

Théorème I .7. *Soit C une partie fermée, convexe, non vide de E préhilbertien. Alors pour tout x de E, il existe un unique point y de C tel que*

$$||x-y|| = d(x, C)$$

On note $P_C(x)$ ce point, appelé projection de x sur C, et on a :

$$y \in C \; \forall z \in C \quad Re(x-y|z-y) \leq 0$$

Remarque : C'est la partie C qui doit être complète. L'espace peut ne pas l'être. Si on est dans un Hilbert, la partie C fermée suffit (car un fermé dans un complet est complet).

Proposition I .8. *Sous les même hypothèses,*

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad ||P_C(x_1) - P_C(x_2)|| \leq ||x_1 - x_2||$$

Proposition I .9. *F sev fermé de E. Alors P_F est un opérateur linéaire de E sur F. L'unique élément y de E tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$ est $P_F(x)$.*

Corollaire I .10. *Existence d'un supplémentaire orthogonal dans E pour un sev fermé.*
F dense dans E ssi $F^\perp = 0$.

Corollaire I .11. $\overline{F} = F^{\perp\perp}$

Application : Espérance conditionnelle comme projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et B sous tribu de A.

Lemme I .12. *Le sous espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est fermé dans l'espace hilbertien $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le projecteur orthogonal sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est noté $E(.|B)$. La projection orthogonal $E(Y|B)$ de $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est caractérisée par la relation d'orthogonalité :*

$$\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \quad E(ZY) = E(Z(E(Y|B)))$$

Démonstration. $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est complet, donc fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le reste découle du théorème de projection. □

Rq : L'unicité de la projection orthogonale sur un sev fermé d'un Hilbert implique que $E(Y|B)$ est l'unique classe U de variable telle que E(ZY)=E(ZU) $\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On appelle cette classe de variable l'espérance conditionnelle.

Par densité de L^2 dans L^1, on définit l'espérance conditionnelle dans L^1.

II Base Hilbertienne

[Schwartz, Topologie générale et Analyse Fonctionnelle p.401]

Après avoir généralisé les résultats de géométrie euclidienne, on veut définir une notion de base (orthonormée). Néanmoins, les bases construites ne sont jamais algébriques (ie libre et génératrice) si l'espace n'est pas de dimension finie.

II .1 Somme hilbertienne de deux espaces Hilbertiens

Somme hilbertiennes finies Considérons deux evn E_1, E_2. On peut mettre sur leur produit $E_1 \times E_2$, que l'on peut identifier à leur somme directe $E_1 \oplus E_2$ plein de normes : $Max(||.||_{E_1}, ||.||_{E_2}), ||.||_{E_1} + ||.||_{E_2}$, etc.

Néanmoins, si E_1, E_2 sont hilbertien, alors leur produit est complet, et on voudrait avoir une norme sur le produit issu d'un p.s. Dans ce cas, le choix intelligent de norme sera : $(||.||_{E_1}^2 + ||.||_{E_2}^2)^{1/2}$, issu du produit scalaire $((x_1, x_2)|(y_1, y_2))_E = (x_1|y_1)_{E_1} + (x_2|y_2)_{E_2}$. Dans ce cas $E_1 \oplus E_2$ est hilbertien, que l'on appelle la somme directe hilbertienne de E_1 et E_2. De plus, cette somme est orthogonale. (Rq : c'est la seule manière de construire une somme orthogonale de 2 Hilbert).

On peut étendre par récurrence ce procédé pour des sommes finies.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ peut se voir comme somme de n copies de $\mathbb{R}$

Somme hilbertiennes infinies Soit $(E_i)_{i\in I}$ famille quelconque d'espaces Hilbertiens. Soit x une famille de $(x_i)_{i\in I}$ telle que la somme $\sum_{i\in I} ||x_i||_i^2$ soit finie. Cela entraîne en particulier qu'il y ait au plus un nombre dénombrable de x_i non nuls.

Soit E l'ensemble de ces familles. On définit facilement une addition et multiplication par les scalaires : c'est un Kev.

Posons $||x|| = (\sum_{i\in I} ||x_i||^2)^{1/2}$. Pour prouver que c'est une norme, la seule chose non triviale est l'inégalité triangulaire. Prendre une somme sur J fini sous ensemble de I, et passer au sup sur les J.

Donc E est un Kevn. La norme provient d'un ps : c'est un préhilbertien (séparé). $(x|y) = \sum_{i\in I}(x_i|y_i)_{E_i}$ bien défini sur E car $|(x_i|y_i)_{E_i}| \leq ||x_i||_{E_i}||y_i||_{E_i} \leq 1/2(||x_i||_{E_i}^2 + ||y_i||_{E_i}^2)$, donc somme finie par définition de E.

Définition 27. *L'espace E ainsi défini s'appelle la somme directe hilbertienne des E_i, noté $\oplus_{i\in I} E_i$.*

Théorème II .1. *La somme directe hilbertienne d'une famille d'espaces hilbertiens est hilbertien.*

Démonstration. Il reste à montrer la complétude de E.

Prendre série normalement convergente, montrer qu'elle converge. Pas trivial. □

Remarque :

$E = \oplus E_i$ est un sous espace du produit $\prod_{i\in I} E_i$, mais pas égal. D'une part déjà parce qu'il ne contient que les vecteurs $(x_i)_{i n I}$ tels que $\sum_i ||x_i||^2 < \infty$. D'autre part parce que un produit infini d'espace normé n'est pas normable, alors que E est Hilbertien. Enfin, E_j n'est *pas* un sev de E. En revanche, si l'on appelle $E_{\{j\}}$ l'espace des $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i = 0\, si\, i \neq j$, alors c'est un sev de E (isomorphe à E_j).

Théorème II .2. *Le sous espace vectoriel engendré par les E_i dans E est dense. Pour tout $x = (x_i)_i$ de E, la série $\sum_i x_i$ est sommable et de somme x ; c'est la seule série $\sum y_i, y_i \in E_i$ qui pûisse converger vers x.*

Démonstration. On prend x orthogonal à tous les E_i. Si $x = (x_i)$, les x_i sont la projection de x sur E_i, donc $x_i = 0$. Donc x=0. □

Rq : Par contre la série $\sum x_i$ n'est en général pas normalement convergente.

Définition 28. *Espace $l^2(I)$*

Si tous les E_i sont le corps des scalaires K, muni de la norme usuelle, alors $E = \oplus_{i\in I} K$ se note $l^2(I)$. C'est l'espace des familles de vecteurs $x = (x_i)$ tq $\sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty$.

Théorème II .3. *Pour que $l^2(I)$ et $l^2(J)$ soient isomorphes, il faut et suffit que I et J soient équipotents.*

II .2 Base Hilbertienne

Définition 29. *Def famille orthogonale, orthonormée*

La famille (e_i) est totale si $vect(e_i)$ est dense dans H.

Une base hilbertienne est une famille orthonormée totale de vecteurs de H.

Proposition II .4. *Toute famille orthonormée est libre.*

(e_i) est une famille totalle $\iff$ la condition $(x|e_i) = 0$ pour tout $i \in I$ implique x=0.

Proposition II .5. *(e_i) est base hilbretienne $\iff$ orthonormée maximale pour l'inclusion.*

Théorème II .6. *Tout espace hilbertien admet des bases hilbertiennes, qui sont toutes équipotentes.*

Démonstration. Base hilbertienne = système orthonormé maximal. Lemme de Zorn : existence (+ tout système orthonormé de vectuer est contenu dans une base hilbertienne !).

Si on prend deux bases hilbertiennes indicées sur I et J, alors $l^2(I)$ et$l^2(J)$ sont isomorphes, donc I et J sont équipotents. □

Corollaire II .7. *Tout espace Hilbertien est isomorphe à un espace $l^2(I)$.*

Définition 30. *Dimension hilbertienne*

On appelle dimension hilbertienne d'un espace de Hilbert le cardinal de l'une quelconque de ses bases de Hilbert. On note dim H la dimension hilbertienne de H.

Lemme II .8. *Inégalité de Bessel-Parseval*

Si $(e_j)_{j\in J}$ est une famille orthonormée d'éléments de H, alors pour tout x dans H, la famille $(x|e_i)^2$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_i |(x|e_i)^2| \leq ||x||^2$$

Théorème II .9. *Soit $(e_j)_{j_i n J}$ famille orthonormée d'éléments de H. On note $K_J = Vect((e_j)_{j\in J})$ et P_{K_J} la projection orthogonale sur le sev fermé K_J. Alors, pour tout x dans H, la famille $((x|e_j)e_j)_{j\in J}$ est sommable dans H et on a*

$$\sum_{j\in J}(x|e_j)e_j = P_{K_J}(x)$$

Démonstration. Sommable : mq elle est de Cauchy. Bessel sur $(|(x|e_j))_{j\in J}$ implique sommable dans $\mathbb{R}$ □

Corollaire II .10. *Soit (e_i) base hilbertienne.*

1/ $\forall x \in H$ $\sum_{i\in I}(x|e_i)e_i = x$

2/ $\forall x, y \in H$ $\sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i|y) = (x|y)$

3/ $\forall x \in H$ $\sum_{i\in I} |(x_i)|^2 = ||x||^2$ (Égalité de Parseval).

Ainsi, l'application $x \to ((x|e_i))_{i\in I}$ est une isométrie linéaire. Elle est surjective ssi E est un Hilbert.

II .3 Exemple de base hilbertienne : Polynômes orthogonaux, séries de Fourier ; Procédé de Schmidt

$E = l^2(I)$; la famille des $(e_j)_{j\in I}$ où $e_j = \delta_{ij}$ est une base hilbertienne de $l^2(I)$

Séries de Fourier [Candelpergher]

Théorème II .11. *Les fonctions $e_n : x \to \exp(2i\pi nx)$, $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hermitienne de l'espace $L^2]0, 1[$.*

On note $c_n(f) = (e_n|f) = \int_0^1 \exp(-2i\pi nx)f(x)dx$ et $S_N(f) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e_n$. On a

$$f \in L^2]0, 1[\quad ||S_n(f) - f||_2 \to 0 \quad \text{quand } N \to +\infty$$

Théorème II .12. *Si $f \in L^2]0, 1[$, alors la suite des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$ et on a la relation de Parseval :*

$$||(c_n(f))||_2^2 = \sum |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2$$

Application : calcul de sommes du genre $\sum 1/n^2$ comme séries de Fourier de fonctions bien choisies (ici fonction identité sur $[-\pi, \pi]$, 2π périodisée)...

Rq : Il y a convergence dans L^2, par contre en général pas convergence ponctuelle et/ou uniforme.

Gram Schmidt, application : polynômes orthogonaux

Définition 31. *Soit ρ une fonction poidsde I dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ munie du ps

$$(f|g)_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

C'est un Hilbert.

Théorème II .13. *Soit ρ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel*

$$\int_I \exp(\alpha|x|)\rho(x)dx < +\infty$$

La famille (X^n) est dense dans $L^2(I, \rho)$. On peut l'orthonormaliser via le procédé de Schmidt, pour avoir une base Hilbertienne, appelée base des polynômes orthonormaux.

Exemple : Soient $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = \exp(-x^2)$, les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Hermite : $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2))$

Théorème II .14. *Procédé de Schmidt*
Soit (f_n) une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale (e_n) de E telle que $\forall n$ les familles $(e_p)_{0\leq p\leq n}$ et $(f_p)_{0\leq p\leq n}$ engendrent le même sev de E.

Démonstration. Une telle famille peut être construite par récurrence. □

III Dualité

[Hirsch-Lacombe]

Théorème de représentation de Riesz

Théorème III .1. *L'application de E dans E' définie par $y \to \phi_y = (.|y)$ est une isométrie surjective. Autrement dit, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E, il existe un unique y dans E tel que :*

$$\forall x \in E \quad \phi(x) = (x|y)$$

III .1 Opérateur linéaires continus sur un Hilbert ; opérateurs compacts

L(E)= espace des formes linéaires continues (opérateurs) de E dans E. On note de la même manière $||.||$ la norme dans E et la norme associée dans L(E).

Proposition III .2. *Pour tout T dans L(E), il existe un unique opérateur T^* dans L(E) tel que*

$$\forall x, y \in E \quad (Tx|y) = (x|T^*y)$$

T^* est appelé l'adjoint de T. De plus, $||T|| = ||T^*||$

Proposition III .3. *L'application de L(E) dans L(E) qui a T associe T^* est une application linéaire si K=R, antilinéaire sir K=C. C'est de plus une isométrie involutive, cad $T^{**} = T$. Enfin, $(TS)^* = S * T*$*

Exemple : $E = \mathbb{R}^d$, ps usuel. L(E) =$\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$; T^* = transposée de T
$E = \mathbb{C}^d$: T^* = transconjuguée de T
$T_K f(x) = T_{K(x,y)} = \int K(x,y)f(y)dm(y)$ avec $K \in L^2(m \times m)$, on a $(T_K f|g) = (f|T_K g)$; ainsi $T_K^* = T_{K^*}$ où $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Proposition III .4. *Pour tout $T \in L(E)$, on a $||TT^*|| = ||T^*T|| = ||T||^2$*

Auto-adjoint

Un opérateur T est appelé auto-adjoint si $T = T^*$. On dit symétrique si K=R ou hermitien si K=C.
Exemple : TT^* et T^*T sont auto-adjoints.
Tout projecteur orthogonal est auto-adjoint.
T_K est autoadjoint ssi K(x,y)=K(y,x) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition III .5. $E \neq \{0\}$. *Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in L(E)$,*

$$||T|| = \sup\{|(Tx|x) \text{ avec } x \in Eet||x|| = 1\}$$

Proposition III .6. $Ker(T) = (ImT^*)^\perp$
$\overline{ImT} = (KetT^*)^\perp$
T inversible si et seulement si T^* l'est aussi

Opérateur compacts

Définition 32. *$T \in L(E,F)$ est dit compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte. On note H(E,F) l'ensemble des opérateurs compacts.*

Exemple : opérateurs à noyau continu.

Proposition III .7. *H(E,F) est un sev fermé de L(E,F) pour la norme $||.||_{L(E,F)}$*

Théorème III .8. *H hilbert séparable et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T*

Démonstration. Brézis p.97 □

Proposition III .9. *H Hilbert $T \in L(H)$ opérateur compact, alors T est limite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition III .10. *E Banach et (T_n) suite d'opératuers de rang fini de E convergeant vers un opérateur T. Alors T est un opérateur compact de E. (Breziz, p.89)*

III .2 Convergence faible dans un Hilbert

Définition 33. *On dit que (x_n) de E converge faiblement vers $x \in E$ si :*

$$\forall y \in E \quad \lim_n (x_n|y) = (x|y)$$

x est alors appelé limite faible de la suite (x_n), qui si elle existe, est unique.

Proposition III .11. *Une suite que converge au sens de la norme (on parle aussi de convergence forte) converge faiblement. Réciproque fausse.*

Contre exemple : (x_n) sur l^2 telle que $x_n = \delta_{j,n}$ converge faiblement vers 0, alors que $||x_n|| = 1$.

Proposition III .12. *Soit (x_n) une suite de E faiblement convergente vers x. Alors*

$$\liminf_n ||x_n|| \geq ||x||$$

De plus, on a équivalence :
(i) La suite (x_n) converge (fortement) vers x
(ii) $\limsup_n x_n \leq ||x||$
(iii) $\lim_n ||x_n|| = ||x||$

Théorème III .13. *(Banach-Alaoglu) (pas spécifique aux Hilbert ; peut être enlevé)*
De toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite faiblement convergente.

Démonstration. Supposons E est séparable. Alors (x_n) suite bornée de E. □

Proposition III .14. *Soit (x_n) suite de E qui converge faiblement vers x. Alors, pour tout $T \in L(E)$, la suite (Tx_n) converge faiblement vers Tx.*

Démonstration. $\lim_n (Tx_n|y) = \lim(x_n|T^*y) = (x|T^*y) = (Tx|y)$ □

III .3 Lax-Milgram ; Stampacchia

Théorème III .15. *Soit a(u,v) une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe, fermé non vide. Etant donné $\phi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que*

$$a(u, v-u) \;\geq\; <\phi, v-u> \quad \forall v \in K$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \frac{1}{2}a(u;u) - <\phi, u> = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - <\phi, v>\}$$

Démonstration. Brezis, p.83 □

IV Vrac

IV .1 Famille hilbertiennes de sous espaces d'un espace Hilbertien

E Hilbert et (E_i) famille de sev fermés de E (donc hilbertiens), deux à deux orthogonaux.

Définition 34. *La famille (E_i) est totale si le sev engendré par les E_i est dense dans E. Elle est dite maximale si elle ne peut pas être agrandie non trivialement, cad en rajoutant un sev fermé orthogonal à tous les autres, non réduit à 0.*

Proposition IV .1. *Cela revient à dire qu'un vecteur orthogonal à tous les autres est nul. Donc famille totale $\iff$ maximale.*

LEÇON 214

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE, THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence : Rouvière, Gourdon (Avez)

I TIL

I .1 Enoncé

I .2 Résultats globaux

Inversion globale, Hadamard-Lévy

I .3 Application : exponentielle et logarithme matricielle

Recasage du dvt sur l'exp

II TFI

II .1 Enoncé

II .2 Résolution approchée d'une équation polynômiale

II .3 Extrémas liés

Recasage du 2eme dvt

III Sous variétés de R^n

III .1 Définition

def, caractérisation

III .2 Espace tangent à une sous variété

LEÇON 215

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE R^N. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence : Rouvière, Gourdon, Mneimé Testard
Motivation : étudier localement une fonction en l'approximant par une fonction simple
Méthodes pour montrer la différentiabilité :

— $f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)$ où L est linéaire (exemple : A^k)

— f somme, produit, composition d'applications différentiables (detA, A^{-1}, etc)

— Si on sait la classe mais on veut la formule, alors :

1. On calcul la dérivée directionnelle (ex : det)
2. On différencie une identité remarquable (exemple : A^{-1})

I Applications différentiables

I .1 Def, premières propriétés

Définition 35. *f différentiable en a si il existe L linéaire $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(||h||)$*
Si L existe, elle est unique et est appelée différentielle de f en a, notée Df(a).

Exemple : appli linéaire, A^p A matrice, A^{-1}
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable ssi dérivable.

Proposition I .1. *Si f est différentiable en a alors f est continue en a*

I .2 Dérivées partielles

Permette de calculer Df(a) assez facilement.

Définition 36. *Def dérivées directionnelles*

Proposition I .2. *Si f différentiable en a, alors f admet des dérivées en a selon tout $v \in \mathbb{R}^m$ et*

$$Df(a)(v) = f'_v(a)$$

Exemple : déterminant (on sait que c'est différentiable car polynômial)
Mais admettre des dérivées selon toutes les directions n'implique pas être différentiable !
Contre exemple : f(x,y)=1 si $y = x^2$, 0 sinon.

Définition 37. *Def dérivées partielles*

Définition 38. *Def matrice Jacobienne*

Proposition I .3. *Si f admet dérivées partielles continues en a, alors f différentiable en a.*
Réciproque fausse !

II Inversion locale et fonctions implicites

Def fct C1 (différentiable et dérivée continue).
TIL
Cor : Inversion globale
Application : chgt variable dans int multiples, exp (recasage dvt)
TFI
Application :

III Différentielles d'ordres supérieurs

III .1 Différentielles d'ordre k

Schwarz

III .2 Formules de Taylor

III .3 Matrice Hessienne ; recherche d'extrémas

Def Hessienne
Th extrémas liés.

LEÇON 218

APPLICATIONS DES FORMULES DE TAYLOR.

Références Gourdon, Rouvière, Demailly

Développements

- Phase stationnaire
- TCL

Rapport jury (2015) Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (par exemple le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leq 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-n/k}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

Motivation / speech à l'oral

I Formules de Taylor

I .1 Sur $\mathbb{R}$

I .2 Extension à $\mathbb{R}^n$

I .3

II Applications en analyse : lien avec DL, DSE

II .1 Développements limités

Définition 39. *DL*

Proposition II .1. *Si f admet un DL d'ordre n, il est unique*

Proposition II .2. *f admet DL d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de a, alors f dérivable*

Rq : On ne peut pas conclure sur fC^1 ou non (et encore moins fC^2, même si f admet DL d'ordre ce qu'on veut) Contre exemple dans Gourdon, ou bien $f(x) = x^3 1_{\mathbb{Q}}$: en 0 c'est un $o(x^2)$

Proposition II .3. *Si f n fois dérivable sur I, alors le DL de f d'ordre n est égal à la formule de Taylor Young.*

II .2 DSE

Définition 40. *DSE, fonction analytique*

Proposition II .4. *fC^∞ tel que le reste dans la formule de taylor Young tend simplement vers 0 quand $n \to \infty$, alors f est DSE en a qui correspond à la limite de la formule de Taylor Young.*

Remarque : l'hypothèse fC^∞ ne suffit pas à l'existence du DSE. Donner le contre exemple classique $f(x) = e^{-1/x^2}1_{\mathbb{R}+}$

Lemme II .5. *Lemme de Borel*

II .3 Développements asymptotiques

Théorème II .6. *Méthode de la phase stationnaire*

III Approximation

III .1 Méthode de Newton

Proposition III .1. *Méthode de Newton*

III .2 Approximation d'intégrales

Méthode des rectangles, trapèzes

III .3 Application en probabilités

Théorème III .2. *TCL*

IV Applications en géométrie

IV .1 Études d'extremums

Proposition IV .1. *$f : U \to R$. Soit a minimum local de f. Alors :*
Si f est différentiable, alors Df(a)=0
Si f deux fois différentiable, alors $\forall h \quad Df(a)(h,h) \geq 0$

Définition 41. *Si $D^2f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict.*

IV .2 Courbes paramétrées

Proposition IV .2. *truc chiant avec p,q plus petit tel que $f^{(p)}(a)$ et $f^{(q)}(a)$ soient non liés. On a ensuite en fonction du signe relatif de p et q les point de rebroussement 1ère, 2nde espèce ou point régulier ou d'inflexion.*

LEÇON 219

EXTREMUMS : EXISTENCE, CARACTÉRISATION, RECHERCHE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Objectif Agreg ; Gourdon,

Développements

- Gradient (Ciarlet)
- Extrémas liés (Testard, Maitrise de l'implicite)

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral

I Problème, existence et unicité des solutions

I .1 Existence et compacité

Fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

I .2 Unicité et convexité

Lemme I .1. *f strictement convexe. Alors il existe au plus un point minimisant f.*

I .3

II Localisation et calcul différentiel

II .1 Extremum local et régularité

Lemme II .1. *Si x_* minimum local de f (et f différentiable) alors $df(x_*) = 0$*

récirpoque fausse (x^3).

II .2 Minimisation sous contraintes

Extrémas liés

II .3

III Outils supplémentaires dans certains espaces fonctionnels

III .1 Espaces de Hilbert

Théorème III .1. *Projection sur un convexe fermé*

III .2 Fonctions holomorphes

Théorème III .2. *Principe du maximum*

Lemme III .3. *Lemme de Schwarz*

Théorème III .4. *Théorème de représentation de Riemann.*

LEÇON 220

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES X' = F(T,X). EXEMPLES D'ÉTUDE DES SOLUTIONS EN DIMENSION 1 ET 2.

Références Demailly, Gourdon

Développements

- Cauchy Lipschitz global
- Floquet

Rapport jury (2015) C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase. Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que la candidat ait une maîtrise convenable de ces questions

Motivation / speech à l'oral

I Résultats généraux

I .1 Définition et vocabulairre

Def EDO, solution, problème de Cauchy, solution maximales, globales

I .2 Existence de solutions

Cauchy Lipschitz global (développement) et local.
Si pas lipschitzienne, on perd unicité (donner exemple).

I .3 Résultats qualitatifs

Lemme de sortie de tout compact.
Lemme de Gronwall

Corollaire I .1. *f C^1 telle que $||f(x)|| \leq \alpha||x|| + \beta$. Alors toute solution maximale est globale.*

Systèmes autonomes : les trajectoires ne peuvent pas se couper !

II Etudes de cas particuliers

II .1 Equation non linéaires particulières

Séparation variables, astuces (eq Riccatti, Bernoulli,...)

II .2 Equation

II .3

III Exemple explicite de construction d'un portrait de phase

Recherche point fixe, linéarisation autour d'un point fixe,

LEÇON 221

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références Demailly, Gourdon

Développements

- Cauchy Lipschitz global
- Floquet

Rapport jury (2015) On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie, bien sûr) Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Motivation / speech à l'oral Super utile en physique

I Résultats généraux

I .1 Définition et vocabulairre

Def EDO, solution, problème de Cauchy, solution maximales, globales

I .2 Existence de solutions

Cauchy Lipschitz global (développement) et local.
Si pas lipschitzienne, on perd unicité (donner exemple).
Lemme de Gronwall (éventuellement)

II Systèmes différentiel linéaires

II .1 Vectorisation

Eq diff linéaire d'ordre p se ramène à une eq d'ordre 1. Donc on se limite aux eq d'ordre 1.

$$X' = A(t)X(t) + B(t)$$

Def système de Cauchy, système homogène (B=0), autonome (A(t)=A et B(t)=B).
Exemple : pendule linéarisé, ressort.

II .2 Structure des solutions

Sous espace vectoriel (si homogène) de dimension n ou affine (cas général).

Théorème II .1. *L'ensemble S_H des solutions maximales d'un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un sev de dimension n de $C^1(I, \mathbb{K})$.*

Démonstration. S_H sev. Par ailleurs :

$$\phi : S_h \to \mathbb{K}^n; V \to V(t_0)$$

est linéaire, injective par Cauchy Lipschitz. Donc isomorphisme. □

Définition 42. *Wronskien*

$$W(t) = \det(V_1(t), \dots, V_n(t)$$

où $V_i(t)$ sont des solutions

Proposition II .2.

$$W'(t) = Tr(A(t))W(t) \Rightarrow W(t) = W(t_0)\exp(\int_{t_0}^t Tr(A(s))ds)$$

III Méthodes de résolution

III .1 Cas particulier A constant

Définition 43. *exponentielle matricielle*

Proposition III .1. *Les solutions s'écrivent alors :*

$$X(t) = \exp((t-t_0)A) + \int_{t_0}^t \exp((t-s)A)B(s)ds$$

Remarque : Chercher la solution sous la forme $X(t) = \exp(tA)V(t)$ (variation de la constante).
Remarque : pour calculer l'exponentielle, soit Jordan-Dunford soit polynômes interpolateurs de Lagrange.

Sans second membre

Exemple :

$$a_p y^{(p)} + \dots + a_0 y = 0$$

alors si P a que des racines simples λ_i les solutions sont CL des $\exp(\lambda_i t)$.
Si racines multiples, alors $y(t) = t^q \exp(\lambda_i t)$ où $0 \leq q \leq m_i - 1$ et m_i multiplicité de λ_i.

Avec second membre

Variation de la constante

III .2 Cas général A non constant

Définition 44. *Résolvante*

Développement en série entière

Abaissement de l'ordre

Variation de la constante

Méthode de la similitude

IV Comportement qualitatif ; linéarisation de systèmes non linéaires

pendule, Floquet

LEÇON 223

SUITES NUMÉRIQUES. CONVERGENCE, VALEURS D'ADHÉRENCE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Références

Motivation / speech à l'oral

Développements Flint Hills, Prohorov, Newton, Galton Watson (éventuellement)
K=R ou C

I Limite d'une suite numérique

I .1 Convergence, divergence

I .2 Suite et fonctions continues

I .3 Suite et ordre (K=R)

Proposition I .1. *Toute suite convergente vers une limite finie est bornée.*

Proposition I .2. *<une suite croissante converge. Limite finie si suite majorée.*

Corollaire I .3. *Gendarmes. Suites adjacentes.*

I .4 Suites récurrentes

Définition 45. $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples : suites récurrentes linéaires ; suites homographiques.

I .5 Comparaison

Définition 46. *o, O* $\sim$

Développements asymptotiques ? (éventuellement)

II Suites numériques, topologie et complétude

II .1 Valeurs d'adhérence et sous suites

II .2 Limsup et liminf

II .3 Fermés et compacts

II .4 Suites de Cauchy et complétude

LEÇON 224

EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES ET DE FONCTIONS.

Références Gourdon, de Bruijn, Godementt (tome 2), Candelpergher

Motivation / speech à l'oral Avant (vers 18eme) les maths étaient moins rigoureuse, il y avait donc besoin de pouvoir faire des calculs précis (à la main) pour vérifier qu'on ne faisait pas n'importe quoi. Plus les applications en physique etc... D'où les tables de log, ou des expressions de séries avec plein de chiffres significatifs. Pour ce faire, il fallait des méthodes pour développer les expressions.

Puis c'est tomber en désuétude, jusqu'à l'arrivée des ordis.

Le gros avantage c'est de pouvoir estimer des quantités qu'on ne peut pas calculer, tout en maitrisant l'erreur faite. L'exemple le plus ancien est la formule de Stirling. On peut aussi citer le théorème des nombres premier.

Dvt asymptotique due à Poincaré (de Bruijn p.11).

Objectif : mettre en avant les idées et intuitions que l'on peut avoir en regardant avec de la hauteur les objets manipulés (exemple : méthode col, phase stationnaire, voir du col), plutôt que les calculs bourrins dégeu où l'on ne comprend rien à ce qui se passe. Justifier avec le fait que les calculs sont fait sur un ordi, donc osef de l'habileté calculatoire.

Développement Méthode phase stationnaire (Candelpergher)

Newton (Rouvière)

Partition entier en parts fixés (bof)

I Définition, premiers résultats

[Gourdon]

I .1 Relation de comparaison

Notations de Landau

Application aux séries à termes positifs ? (recaser Flint Hills en exemple mais surement un peu scandaleux)

I .2 Développement asymptotiques

Échelle de comparaison, def dvt asymptotique

Mais attention, série pas forcément convergente, et pas forcément égale à f(x) (et ce même si elle converge). Ca veut juste dire que c'est vrai en tronquant à tout n avec un O. (lire de Bruijn ou Godemen p.224)

Exemple :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

$f(x) =$ (succession d'IPP, foireux en fait)

Lemme I .1. *Lemme de Watson (Candelpergher) (lien entre DA d'une fonction et DA de sa TL)*

f continue sur $[0, \infty[$*, à décroissance au plus exponentielle à l'infini. Supposons que le développement asymptotique en 0 de f est :* $\sum c_n t^{\alpha_n}$ *où* $-1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots$*. Alors en* $x \to \infty$ *on a :*

$$\mathcal{L}f(x) := \int_0^\infty \exp(-xt) f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{\Gamma(\alpha_n + 1)}{x^{\alpha_n + 1}}$$

Application : $\int \exp(-xs^2)g(s)ds$

I .3 cas particulier : développement limités

Def, opérations élémentaires. Appli : TCL

I .4 Résolution de $x\exp(x) = t$

II Développement asymptotique d'intégrales

II .1 Méthode de Laplace

Application : formule de Stirling

II .2 Méthode de la phase stationnaire

Théorème II .1. *Soient ϕ et f de classe C^∞ réelles sur [a,b]. Si la phase de ϕ est stationnaire ($\phi'(t_0) = 0$) en un unique point $t_0 \in [a,b]$, et si ce point est intérieur à [a,b] tel que $\phi''(t_0) \neq 0$, alors pour $x \to +\infty$:*

$$\int_a^b e^{i\phi(t)}f(t)dt = e^{ix\phi(t_0)}f(t_0)\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\phi''(t_0)|}}e^{sgn(\phi''(t_0)i\pi/4)}\frac{1}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x})$$

II .3 Méthode du col

Théorème II .2. *Soient ϕ et f fonctions analytiques dans ouvert U, et z_0 un col de ϕ c'est à dire tel que :*

$$\phi'(z_0) = 0 \tag{224.1}$$

$$\phi''(z_0) = \rho e^{i\alpha} \neq 0 \tag{224.2}$$

Soit γ_0 le chemin de plus grande descente passant par z_0, c'est à dire :

a) $\Im\phi(\gamma_0(t)) = \Im\phi(z_0)$ pour tout t

b) Le vecteur $\gamma_0'(t)$ a pour direction $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

Alors on a :

$$\int_{\gamma_0} e^{\tau\phi(z)}f(z)dz = f(z_0)\Big(\frac{2\pi}{|\phi''(z_0)|}\Big)^{1/2}e^{i\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}\frac{e^{\tau\phi(z_0)}}{\tau^{1/2}} + e^{\tau\Re\phi(z_0)}O(\frac{1}{\tau})$$

Application : fonction d'Airy.

III Relations d'équivalence entre suites

LEÇON 226

SUITES VECTORIELLES ET RÉELLES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE $U_{N+1} = F(U_N)$

Référence :
Gourdon Analyse
Rouvière PGCD
[H-U] Hinart Urrity : Optimisation et analyse convexe
[Cia] Ciarlet : Intro à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation
[Dem] Demailly
Vidonne

Motivation et définitions

Définition 47. *Soient (E,d) un espace métrique et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(u_b n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k si on peut écrire $\forall n \geq k u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$ où $f : E^k \to E$.*

Définition 48. *Soit $I \in E$ et $f : I \to E$ et $J \in I$, J stable par f. On peut alors définit une suite par récurrence à partir de u_0 par $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, on se placera dans $E = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle.

I Dépendance vis à vis de f

Définition 49. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \in I$. On considère une suite $(u_n)_n$ vérifiant : $u_0 \in I et u_{n+1} = f(u_n)$.*

I .1 f continue

Proposition I .1. *Si $\lim u_n = l$ et f continue en l, alors f(l)=l*

Corollaire : Si f n'a pas de point fixe, (u_n) diverge.
Application : $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On a l'équivalence :

$$(u_n)_n converge \iff \lim(u_{n+1} - u_n) = 0$$

I .2 f monotone

[Gourdon]

Proposition I .2. *Si f croissante, $(u_n)_n$ est monotone. Son sens de monotonie est alors donné par les deux premiers termes. Si f est décroissante, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et de sens de monotonie opposés.*

Example : $u_0 \geq -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. (u_n) monotone et bornée, donc admet une limite (qui est le nombre d'or).

I .3 f affine

f(x)=ax+b $u_{n+1} = a * u_n + b$: suite arithmético-géométrique.

Si u_n et v_n solutions, alors $u_n - v_n$ est une solution d'une équation géométrique On cherche solution constante l vérifiant nécessairement l=al+b. Donc $(u_n - l) = a^n(u_0 - l)$

I .4 f contraction

Théorème I .3. *Point fixe de Picard*

Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et f application strictement k-contractante avec $k < 1$.

Alors f admet un point fixe $x \in E$ et ce point fixe est la limite de toute suite (x_n) d'approximation successives définies par $x_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} = f(x_n)$, et on a $d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, x_0)$.

Rq : Si une des itérées de f vérifie les hypothèses, alors le théorème est aussi vérifié.

Théorème I .4. *Cauchy Lipschitz global*

I .5 f est une homographie

[Vidonne]

Définition 50. *Soient a,b,c,d quatre réels tels que $c \neq 0$ et ad-bc≠0. $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$*

Proposition I .5. *$u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. On a $f(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0 (E)$.*

Si (E) admet deux racines distinctes réelles α et β et $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = \gamma^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$

Si $\Delta < 0$, f n'a pas de point fixe donc (u_n) diverge.

Si $^\delta = 0$, f a un unique point fixe α et si $u_0 \neq \alpha$ on a $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{2nc}{a+d}$.

Action d'une homographie sur une droite $D_n = \mathbb{R}\binom{x_n}{1}$: Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors : $D_{n+1} = MD_n = \mathbb{R}\binom{ax_n+b}{cx_n+d} = \mathbb{R}\binom{\frac{ax_n+b}{cx_n+d}}{1}$

Si $x_n = -d/c$ on a $D_{n+1} = \mathbb{R}\binom{1}{0}$ et $^D_{n+2} = \mathbb{R}M\binom{1}{0} = \mathbb{R}\binom{a/c}{1}$ avec la convention f(-d/c)=a/c.

II Dépendance vis à vis du premier terme

II .1 Suites récurrentes linéaires d'ordre s

$$u_{n+s} = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k u_{n+k} (*)$$

L'ensemble des suites satisfaisant (*) est un Kev de dimension s. isomorphisme entre $(u_n)_n$ et la donnée des s premiers termes.

Posons $P(X) = X^s - \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k X^k = \prod_{i=1}^m (X - \rho_i)^{a_i}$ Une base de l'espace des solutions est donné par les suites : $n^p \rho_i^n$ pour $i = 1, \ldots, m$, $0 \leq p \leq a_i$.

Enfin, posons $X_n = (u_n, \ldots, u_{n+s-1})$ (vecteur ligne), alors $X_{n+1} = MX_n$ où M est une matrice compagnon (l'écrire proprement).

Donc $X_n = M^n X0$: réduction de matrice pour calculer M^n

II .2 Points fixes attractifs, répulsifs ou indifférents

Définition 51. *Soit a point fixe de f.*

- *Si $|f'(a)| < 1$ on dit que a point fixe attractif*
- *Si $|f'(a)| > 1$ on dit que a point fixe répulsif*
- *Si $|f'(a)| = 0$ on dit que a point fixe superattractif*
- *Si $|f'(a)| = 1$ on ne peut rien dire.*

Proposition II .1.

- *Si a est un point fixe attractif de f, $\forall k$ tq $|f'(a)| < k < 1, \exists h > 0 tq \forall x_0 \in B(a, h) \in E \lim x_n = a$ avec $\forall n \in \mathbb{N} - -x_n - a|| \leq k^n ||x_0 - a||$*
- *Si a est un point fixe superattractif et que f est C^2 alors on a une meilleure vitesse de convergence : $\forall n \in \mathbb{N} |x_n - a|| \leq \frac{2}{M}(\frac{M}{2}|x_0 - a|)^{2^n}$ où $M = max|f''(x)|$*
- *Si a est un point fixe répulsif alors $\exists h > 0$ tel que $\forall x \in B(a, h)$ $\{a\} |f(x) - a| > |x - a|$*

Exemple :

f(x)=sin(x) I=[0,π /2] : $u_{n+1} = f(u_n)$ est strictement décroissante et minorée donc converge vers 0 (unique pt fixe).

f(x)=sh(x). La suite x_n diverge vers $+\infty$.

II .3 Systèmes dynamiquers, chaos

Sarkovskii [Chambert Loir], Ensemble de Cantor

II .4 Bassins d'attraction

II .5 Opérateurs cycliques et hypercycliques

Critère de Kitai

III Approximation et équations non linéaires

Méthode de Newton, d'Euler explicite

III .1 Résolution de systèmes linéaires

A matrice invrerbsible, b vecteur, on résoud Ax=b.

Gradient à pas optimal [H-U]

Méthode de Jacobi et Gauss-Seidel [Cia]

III .2 Approximation de racine carré

Par la méthode de Newton [Rou]

application : Méthode de Héron

Par le développement en fractions continues

III .3

III .4 Idées en plus

Méthode d'accélération de convergence (Stephensen) –> dvt ?
Parler de Chaines de Markov –> Polya, Galton Watson
Matrice de Householder
– Théorème de Hartman-Grobman [Gonnord and N. Tosel. Calcul differentiel Ellipses, 1998]

LEÇON 228

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.

Référence :
Rombaldi, Éléments d'analyse réelle
Hauchecorne, Les contres exemples en mathématiques : indispensable pour tous les contre exemples
Gourdon au besoin
Notation : On note I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ définie sur I, et E la fonction partie entière.

I Notions de continuité et dérivabilité

I .1 Définition et (contre)-exemples

Définition 52. *f continue en a si $\lim_a f(x) = f(a)$, ie $\forall$ voisinage V de f(a), il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. Sur $\mathbb{R}$, avec la distance usuelle, cela ce caractérise par :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 / |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Un application est dite discontinue en a si elle n'est pas continue en a.
f est continue sur I ssi f est continue en tout point de I. On note $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Théorème I .1. *f continue en a $\iff$ Pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers f(a).*

Exemple et contre exemples :

— La fonction de Dirichlet $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part (discontinue en tout point de $\mathbb{R}$).

— $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \text{si x est rationnel} \\ x + 1/2 - E(x+1/2) & \text{si x irrationnel} \end{cases}$
est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui n'est continue en aucun point de $[0,1]$.

— La fonction $f(x) = x\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue en 0, discontinue en tout autre point.

— $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si x=p/q irréductible} \end{cases}$
est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

— $f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ où $u_n(x) = \frac{h(nx)}{2^n}$ avec $h(x) = x - E(x)$
est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, discontinue sur les voisinages des nombres irrationnels.

Définition 53. *Dérivabilité, dérivée à gauche et à droite.*

— La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout réel non nul, mais pas en 0.

— $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad \text{x rationnel} \\ 0 & \text{si x irrationnel} \end{cases}$ est dérivable en 0, mais discontinue sur $\mathbb{R}^*$.

— $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est dérivable en sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est dérivable ni à droite ni à gauche en 0.

— Fonction de Van der Werden : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{5}{4}^n \phi(4^n x)$ où $\phi(x) = |x|$ sur $[-1,1]$, de période 2 ; est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

Proposition I .2. *Dérivabilité implique continuité.*

Réciproque fausse. La dérivée de $f(x) = x^2 sin(1/x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$ n'est pas continue en 0.

Théorème I .3. *L'ensemble des fonctions continues nulles part dérivables sur* $[0, 1]$ *est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur* $[0, 1]$.

Proposition I .4. *Stabilité par opérations usuelles.*
Opération sur les dérivée : formule dérivée d'une somme, produit, quotient, composée, inverse.

Définition 54. *Fonctions* C^1

Définition 55. *Primitive : fait le lien entre continuité et dérivabilité.*
Toute fonction continue sur un intervalle I est la fonction dérivée sur I d'une fonction définie et dérivable sur I, que l'on appelle une primitive de f.

$f(x) = \mathbf{1}_0$ est discontinue en 0, continue partout ailleurs, mais n'admet pas de primitive.

Définition 56. *Dérivées d'ordre supérieures. Espaces* C^n.

Prolongement et nature des discontinuité

Définition 57. *Discontinuité première (existence de limite à gauche et droite) et deuxième espèce.*

Théorème I .5. *Théorème du prolongement continu*
Si a point frontière de I et f admet une limite l en a, alors il existe un unique prolongement de f à $I \bigcup \{a\}$ *continu, défini par* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *si* $x \in I$ *et* $\tilde{f}(a) = l$.

L'hypothèse a point à la frontière de I est importante : $f(x) = \mathbf{1}_0(x)$ admet limite égales à gauche et à droite en 0, mais n'est pas continue en 0.

Théorème I .6. *Théorème du prolongement dérivable*

I .2 Influence de l'espace de départ

I compact

Définition 58. *f est uniformément continue si* $\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 / (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Proposition I .7. *Uniforme continuité implique continuité.*

Théorème I .8. *Théorème de Heine*
Une fonction continue sur un compact est uniformément continue

La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément continue.

Théorème I .9. *Fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

Faux si I pas compact.
Faux pour la dérivée : $f(x) = x^2 sin(1/x^2); f(0) = 0$, on a f'(0)=0 mais f' non bornée près de 0.

Extréma et dérivée

Théorème I .10. *Théorème des valeurs intermédiaire.*
I intervalle et f continue sur I. Alors f(I) est un intervalle.

$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 mais vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$.

Théorème I .11. *Théorème de Rolle*

Théorème I .12. *Accroissements finis. Inégalité des accroissements finis.*

Corollaire I .13. *f croissante si f' positive, décroissante si f' négative. SUR UN INTERVALLE*

Si pas intervalle, considérer 1/x...

Théorème I .14. *Théorème de Darboux*
f dérivable, alors f et f' satisfont les valeurs intermédiaires.

Démonstration. $T = \{(x, y), x \leq y\}$ connexe.$g(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ continue sur T. Donc g(T) est un intervalle. TAF : $\exists c / g(x, y) = f'(c)$. □

Exemple :

Théorème I .15. $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *a un point fixe.*

Généralisation : Sarkovski et Boruwer (en dimension supérieure).

I .3 Limites

Convergence uniforme

Proposition I .16. *Soit f_k C^0, convergeant uniformément vers f. Alors f est C^0.*
Si la convergence n'est que simple, alors f est C^0 sur un sous-ensemble dense.

Proposition I .17. *Convergence uniforme implique la dérivée est continue.*
Si la convergence est simple, la dérivée est continue sur un sous-ensemble dense.

Démonstration. $f'(x) = \lim_n (f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) \Rightarrow f'$ C^0 sur un sous ensemble dense par la proposition précédente. □

Exemple (Darboux) : Fonction f telle que les discontinuités de f' sont denses.

$$\phi(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}\phi(\pi n x) \quad \text{avec } a_n \geq 0,\ \sum a_n < \infty$$

$$f'(x) = \sum_n \phi'(sin(\pi n x))\pi cos(\pi n x)$$

Dernière formule vraie partout, par contre f' discontinue en tout point irrationnel.

II Exemples et Pathologies

II .1 Fonctions monotones, focntions convexes

Monotones

Définition 59. *Fonctions croissante, décroissante, monotone.*

Théorème II .1. *Nombre dénombrable de discontinuité.*

Théorème II .2. *Théorème de Lebesgue*
Une fonction monotone est dérivable p.p

Exemple pathologique : Escalier du diable de Cantor.

Théorème II .3. *Théorème de Dini.*
Limite simple de fonction monotone est en fait limite uniforme.

Convexe

Proposition II .4. *Fonction convexe est continue sur l'intérieur de son espace de définition.*

Proposition II .5. *Dérivable à gauche et à droite, dérivées à gauce (resp à droite) croissantes.*

Proposition II .6. *Nombre dénombrable de points de non dérivabilité.*

II .2 Etude des fonctions nulles part dérivable dans C^0

Théorème II .7. *Toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions continues nulles part dérivables sur $[0,1]$.*

II .3 Borel

III Constructions génériques

III .1 Continuité et dérivabilité sous le signe somme

Théorème III .1. *Continuité sous le signe $\int$*
- *$t \to f(t,x)$ est C^0 presque partout en x.*
- *$x \to f(t,x)$ est intégrable sur I.*
- *$\exists g$ tq $\forall t \in I$ $|f(t,x)| \leq g(s)$ p.p en x, avec g intégrable.*

Alors $x \to \int_I f(t,x)dt$ est C^0

Théorème III .2. *Dérivabilité sous le signe* $\int$

- $t \to f(t,x)$ *est* C^0 *presque partout en x.*
- $x \to f(t,x)$ *est intégrable sur I.*
- $\forall K \in\in I \exists g \in L^1$ *tq* $\forall t \in I$ $|\partial_x f(t,x)| \leq g(s)$ *p.p en x.*

Alors $F : x \to \int_I f(t,x)dt$ *est dérivable et* $F'(x) = \int_I \partial_x f(t,x)dt$
Généralisation pour dérivée supérieures.

Applciation : Fonction gamma $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$.

III .2 Approximation par des polynômes

Dans cette section, on considère les fonctions C^0, 2π périodiques. On introduit les coefficients de Fourier $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt$ et la série de Fourier correspondante $S_N(f)(t) = \sum_{-N}^N c - n(f)\exp(int)$.

Théorème III .3. *Les polynômes trigonométrique sont denses dans* $C^0([0,2\pi])$

Rq : mais pas forcément via série de Fourier !

Théorème III .4. *Théorème de Jordan-Dirichlet*
Somme partielle d'une série de Fourier d'une fonction C^1 *par morceaux converge vers* $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$.

Théorème III .5. *Théorème de Féjer*
Moyenne de Césaro de la somme partielle de la série de Fourier d'une fonction continue converge.

LEÇON 229

FONCTIONS MONOTONES, FONCTIONS CONVEXE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence : Ciarlet, Gourdon

Si pas précisé, on note I intervalle de $\mathbb{R}$ et f fonction de I dans $\mathbb{R}$.

I Fonction monotones ou convexes définie sur $\mathbb{R}$

I .1 Définition, stabilité par opérations élémentaires

Définition 60. *Fonction croissante, décroissante, monotone.*

Exemple : fonction de répartition d'une proba.

Définition 61. *Fonction convexe si inégalité de convexité vérifiée, Fonction concave. Visualisation sur un schéma (segment reliant deux points au dessus du graphe).*

Exemple : carré de la norme dans un espace euclidien est strictement convexe. Fonction valeur absolue est convexe, pas strictement.

Rq : f croissante ssi -f décroissante ; f convexe ssi -f concave. On ne s'intéressera donc qu'aux fonctions croissantes et convexes.

Remarque : inégalité stricte donne strictement (convexe, monotone, etc)

Rq : fonction convexe et concave $\iff$ affine

Proposition I .1. *Stabilité par opérations élémentaires :*
L'ensembles des fonction croissante (resp convexe) est stable par addition et multiplication par scalaire positif.
Fonction croissante stable par composition.
Produit de deux fonctions convexes positives et croissantes est convexe.
f convexe croissante et f convexe alors $f \circ g$ convexe.

Contre exemple : x*x pas croissante. x*x^2 pas convexe.

Corollaire I .2. *Fonction monotones (resp croissante resp convexe) pas sev.*

I .2 Caractérisation des fonctions monotones et convexes. Lien convexe/monotone

Proposition I .3. *$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.*

$$f \text{ croissante} \iff f' \geq 0$$

$$f \text{ strictementcroissante} \iff f \text{ croissante et } \{x \in I : f'(x) = 0\} = \emptyset$$

Proposition I .4. *f de I dans $\mathbb{R}$ est convexe $\iff$ son épigraphe $epi(f) := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ est convexe.*

Proposition I .5. *$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe $\iff$ $\forall x_0 \in I$ le taux de variation en x_0 est croissante.*

Conséquence : f convexe, $a < b < c$ on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$. Se voit bien graphiquement.

I .3 Intervalle de départ et d'arrivée

Proposition I .6. *f monotone définie sur I. Alors f continue sur I ssi f(I) est un intervalle.*

Proposition I .7. *Soit f application réelle continue définie sur I. Alors : f injective sur I ssi f strictement monotone sur I.*

Proposition I .8. *f réelle définie, continue et strictement monotone sur I. Alors f est un homéomorphisme de I sur f(I).*

Proposition I .9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Si majorée, alors f constante*

Rq : faux si f pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier....

Atteinte de borne Fonction convexe minimum local = global !

I .4 Fonctions convexe définie sur un espace vectoriel quelconque

I .5 Fonctions à variation bornée

Définition 62. *Soit I intervalle de bornes $a < b$ $f : I \to \mathbb{R}$ est dite à variations bornées si sa variation totale est finie, où $VT(f) = \sup_{n\geq 1} \sup_{a<x_0<\cdots<x_n<b} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$*

Théorème I .10. *Une fonction à variation bornée peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes*

Corollaire I .11. *Une fonction à variation bornée est dérivable presque partout.*

Ex : une fonction absolument continue est à variation bornée Si $f(x) = \int_a^x g$ où $g \in L^1$ alors $VT(f) = ||g||_1$ et f peut s'écrire $f(x) = \int_a^x g^+ - \int_a^x g^-$
Réciproque fausse (prendre escalier de Cantor).

II Régularité ; Limite.

II .1 Etude approfondie de la régularité des fonctions monotones et convexes

Fonctions monotones

Théorème II .1. *Théorème de la limite monotone*
f croissante définie sur I. Soient a et b les extrémités de I. Alors f admet en $x_0 \in I$ des limites à gauche et à droite. On a :

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$$

Proposition II .2. *Fonction monotone n'a qu'un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.*

Ex : fonctions strict croissantes dont les points de discontinuité sont denses [Hauchecorne] Ex : $f(x) = \frac{1}{E(1/X)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ croissante, ensemble des points de discontinuité sont les inverses des entiers (non nuls).

Théorème II .3. *Lebesgue*
Une application monotone est dérivable presque partout.

Fonctions convexes

Proposition II .4. *$f I \to \mathbb{R}$ convexe admet en tout point de $\mathring{I}$ des dérivées à droite et à gauche.*

Corollaire II .5. *Une fonction convexe définie sur I est continue sur $\mathring{I}$.*

Rq : $1_{\{0,1\}}$ est convexe sur $[0, 1]$.

Lien convexe croissante

Proposition II .6. *$f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Les applications f'_g et f'_d (dérivée à gauche et à droite) sont croissantes sur $\mathring{I}$.*

Proposition II .7. *L'ensemble des points de non dérivabilité d'une fonction convexe est au plus dénombrable.*

Théorème II .8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. f convexe ssi f' croissante ssi courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.*

II .2 Limite de suites de fonction

Proposition II .9. *Limite simple de fonction monotone (resp convexe) est encore monotone (resp convexe). Faux pour strictement convexe. Vrai pour strictement monotone.*

Théorème II .10. *Théorème de Dini*
Soit (f_n) suite de fonctions croissantes et continues de I dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f, alors la convergence est uniforme.

Théorème II .11. *Théorème de Helly*

Théorème II .12. *Théorème de Prohorov*

III Autre idées

Fonctions log convexes.
Inégalité de Kantorovitch (fct convexes).

LEÇON 230

SÉRIES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES. COMPORTEMENT DES RESTES OU DES SOMMES PARTIELLES DES SÉRIES NUMÉRIQUES. EXEMPLES.

Références :

Remarque du jury 2010 : L'étude de la convergence d'une série élémentaire par une hiérarchisation des méthodes et par la vérification des hypothèses correspondantes est appréciée du jury. Il faut soigner la présentation du plan et ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on veut énoncer un théorème de convergence absolue (même remarque pour l'intégration). Le jury demande que les candidats ne confondent pas équivalents et développements asymptotiques. Les meilleurs pourront invoquer les méthodes classiques de renormalisation des séries divergentes.

Remarque du jury 2011 à 2015 : De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en et le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, ...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

Historiquement : Gros problèmes philosophique chez les Grecs qui comprennent rien au passage à la limite (paradoxe de Zénon). Les philosophes s'en mêlent, on citera Bergson, qui dans un grand délire déclare : "Les philosophes l'ont réfuté de bien des manières et si différentes que chacune de ces réfutations enlève aux autres le droit de se croire définitive". Même problème 2000 ans plus tard chez des youtubeurs célèbres qui font n'importe quoi et ça fait 3 millions de vue : `https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww`

Revenons aux choses sérieuses. Ca part avec les trois Bernoulli (Jean, Jacques, Daniel, mais en fait y'en a plus : `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_family`) qui s'amusent avec des séries de fonctions du genre $\sum f(k)$ (nombres de Bernoulli, mais aussi solutions d'eq diff comme la corde vibrante en somme de fonction trigo).

Taylor développe les fonctions en série qui porte son nom et qu'on doit apprendre par cœur en L2, puis Euler (pour calculer la somme de séries convergeant lentement, exemple typique la série harmonique) et MacLaurin (pour calculer des intégrales) en rajoutent une couche et obtiennent des formules sommatoires dégelasses sans nécessairement se soucier de la convergence. Ca pose des problèmes existentiels à D'Alembert et Abel qui trouvent des contre-exemples où ces méthodes ne s'appliquent pas.

Gauss et Cauchy calment tout le monde en développant proprement la théorie.

Après ça part encore plus en couille avec Riemann qui conjecture des trucs et donne du boulot à 20 générations de matheux.

I Définition et modes convergence

I .1 Convergence simple

Définition 63. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On appelle (S_n) la suite des sommes partielles définie par : $S_n = \sum_{k=O}^{n} u_k$.*
La série générale de terme (u_n) est la limite des sommes partielle (si cette limite existe).

On insiste sur le fait que l'ordre de sommation est d'une importance capitale, et on développera ce point par la suite.

Proposition I .1. *Une série complexe $\sum u_n$ converge ssi $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont des séries convergentes. Lorsque c'est le cas, il vient : $\sum u_n = \sum Re(u_n) + i \sum Im(u_n)$.*

Exemples : La série arithmétique de terme général (a n +b)$_n$ (avec a, b complexe) diverge sauf pour a=b=0.

La série géo (q^n) converge pour $|q| < 1$

Série télescopique (celles là elles sont cool !), application : Stirling.

La convergence ou non de la série de Flint-Hills $\sum \frac{1}{n^3 sin(n)^2}$ est inconnue à ce jour. `http://arxiv.org/abs/1104.5100`

Application : Développement p-adique ; (Nombres normaux).

Proposition I .2. *Stabilité par combinaison linéaire : L'ensemble des série simplement convergente à valeur dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev.*

Théorème I .3. *(Série alternées) Soit (u_n) une suite de réels, telle que la suite $(|u_n|)$ soit décroissante, de limite nulle, et telle que $\forall n, u_n u_{n+1} \leq 0$. Alors la série $\sum u_n$ est convergente, et :*
$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a le signe de u_0.
$\forall n \; |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$ (majoration des restes)

Preuve : S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes.

L'hypothèse de décroissance est importante. Le résultat de majoration des restes est en pratique d'une grande importance, et ne doit pas être négligé.

Proposition I .4. *Critère de Cauchy :*
La série ($\sum u_n$) converge $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N_\epsilon \; \forall p \in \mathbb{N}, \; |\sum_{k=n}^{n+p} u_k| < \epsilon$

Corollaire I .5. *Corollaire : Si $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0. Réciproque fausse.*

I .2 Convergence absolue

Définition 64. *Une série converge absolument si $\sum |u_n|$ converge. En particulier, la convergence absolue entraîne la convergence simple. (espace complet)*

Exemple : exponentielle complexe ; série $\sum \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ converge ssi $|z| < 1$.

Proposition I .6. *L'ensemble des séries absolument convergente est une algèbre.*

Proposition I .7. *Produit de Cauchy-Mertens*

Soit (u_n) le terme général d'une série absolument convergente et (v_n) celui d'une série simplement convergente. Alors le produit de convolution est (simplement ?) convergent.
$(\sum u_n)(\sum v_n) = \sum w_n$
avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Exemple : exp(z+z')= exp(z) exp(z')

L'hypothèse d'absolue convergence d'une des deux séries est nécessaire. Par exemple, $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

I .3 Convergence commutative

Définition 65. *Une série convergent commutativement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, les séries $\sum u_{\sigma(n)}$ convergent vers la **même** limite.*

Proposition I .8. *Il y a équivalence entre la convergence commutative et la convergence absolue.*

Proposition I .9. *(Riemann) Si $\sum u_n$ converge simplement mais pas absolument (semi-convergente), alors pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers l.*

II Comportement en l'infini : recherche d'équivalent, dévelopement asymptotique, renormalisation

II .1 Séries à terme positifs

Théorème II .1. *Théorème de comparaison*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \; 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :
(i) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.
(ii) Si $\sum u_n$ diverge, il en est de même pour $\sum v_n$.

Proposition II .2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec $v_n \geq 0$. Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge. En particulier, si $u_n \sim v_n$, les séries considérées sont de même nature.*

Corollaire II .3. *Si $u_n \geq 0$, les séries $\sum u_n$, $\sum log(1 + u_n)$, $\sum log(1 - u_n)$ sont de même nature.*

Application : la série $\sum \frac{1}{p_n}$, où p_n représente la suite des nombres premiers, diverge.
Idée : introduire le produit $\Pi_m = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ puis passer au log.

Proposition II .4. *Séries de Bertrand*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \textit{ converge ssi } (\alpha > 1) \textit{ ou } (\alpha = 1 et \beta > 1).$$

II .2 Comparaison série et intégrale

Soit f une fonction continue par morceau sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives décroissante.

Proposition II .5. *La série $\sum(\int_{t=n-1}^{n} f(t)dt) - f(n)$ est convergente. La série $\sum f(n)$ converge ssi la fonction qui à x associe $\int_a^x f(t)dt$ où a est un réel positif une limite en ∞.*

Importance du caractère positif : On a $\int_0^\infty sin(2\pi x)dx$ diverge, mais $\sum \int_n^{n+1} sin(2\pi t)dt$ converge.
Applications :
Critère de convergence des séries de Riemann.
Étude du reste d'une série convergente comme $\sum \frac{1}{n^2}$
Étude des sommes partielles de séries divergentes : $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum \sqrt{n}$
Équivalent de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 1$.
Équivalent de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \leq 1$. (en particulier série harmonique et constante d'Euler).

II .3 Des séries divergentes pas si divergentes que ça

Parfois on tombe sur une série divergente, mais pour plein de raison, on aimerait quand même lui donner une valeur finie. On parle de renormalisation.

Si la somme diverge, c'est (peut être) que l'on somme pas comme il le faut. On peut chercher un autre procédé de sommation qui donne une valeur finie.

Proposition II .6. *Moyenne de Norlund (généralisation de Césaro)*
Soit (u_n) une suite convergeant vers l (éventuellement infinie), et (α_n) suite de réels strictement positifs telle que $\sum \alpha_n$ diverge. Alors la suite des moyennes pondérées : $\frac{\alpha_0 u_0 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_0 + \cdots + \alpha_n}$ tend aussi vers l.

Exemple : La moyenne de Césaro de la suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k)_n$ vaut $\frac{1}{2}$.

Proposition II .7. *Méthode de sommation d'Abel*
Posons $f(x) := \sum a_n x^n$. La somme d'Abel de la série (a_n) est alors définie comme la limite de f quand x tend vers 1. (si cette limite existe)

Exemple : La somme d'Abel de $((-1)^n n)$ (ie 1-2+3-4+...) vaut 1/4.

Application et Généralisations : Hardy-Littelwood, théorèmes Tauberiens, Abel angulaire.

Théorème II .8. *Hardy-Littelwood Si $a_n = O(\frac{1}{n})$ et $\lim_{x \Rightarrow 1} \sum a_n x^n = l$ alors $\sum a_n = l$.*

III Applications : Manipulation de séries, procédés de sommation

III .1 Fonction de répartition des proba discrètes ; Lemme de Borel Cantelli ; Marche aléatoire

La théorie des probabilité donne un espace concret d'application des séries. En effet, si Y va discrète, alors la loi de Y est entièrement caractérisée par la fonction de répartition. Et on remarque que $\mathbb{P}[Y \geq t]$ est le reste d'une série convergente.

On peut, par exemple, énoncer l'inégalité de Markov.

Proposition III .1. *Inégalité de Markov : Y une v.a positive intégrable. On a :*

$$\mathbb{P}[Y \geq t] \leq \frac{E[Y]}{t}$$

Variantes : Bienaymé-Chebychev, Bernstein.

On donne aussi les lemmes de Borel-Cantelli, avec l'application classique des singes qui tapent une infinité de fois l'intégrale de Twilight et Harry Potter sur un ordi (les pauvres...).

La loi des grands nombres se résume à la recherche d'un équivalent d'une série de variables aléatoires.

Enfin, on définit une marche aléatoire comme une somme de vecteurs aléatoires indépendants identiquement distribués. On a le théorème suivant :

Proposition III .2. *En dimension 1 ou 2, une marche aléatoire symétrique repasse une infinité de fois par l'origine.*
En fait, elle passe une infinité de fois par n'iimporte quel point du réseau : on dit qu'elle est récurrente.

III .2 Somme de Mac-Laurin et fonction zéta de Riemann

Définition 66. *La fameuse série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est bien définie pour Re(s)>1 (converge absolument).*

Proposition III .3. *La fonction zêta de Riemann admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, avec un pôle simple en 1.*

Lemme III .4. *On a le lien suivant entre les nombres de Bernoulli et la fonction zéta :*

$$\zeta(-s) = -\frac{B_{s+1}}{S+1}$$

Application : On obtient les relations étonnantes :

$$\zeta(0) = \sum(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 0$$

Exemple : en physique : effet Casimir, théorie des cordes bosonique (26 dimensions, mais en fait cette théorie a été).

Proposition III .5. *Procédé de renormalisation par la fonction zéta*
On considère une suite (u_n), et on pose : $\zeta_u(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n^s}$. Si cette série peut se prolonger analytiquement, alors on peut donner un sens à des sommes à priori divergentes.

Application : trace, déterminant d'opérateurs hermitiens auto adjoints, de vp positives.

$$\zeta_A(s) := TrA^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-s\ln(\lambda_n))$$

$$\Rightarrow detA = exp(-\zeta_A'(0))$$

Pour le fun : Minakshisundaram–Pleijel zeta function `https://en.wikipedia.org/wiki/Minakshisundaram%E2%80%93Pleijel_zeta_function` (à pas mettre dans la leçon, c'est un appel pour se faire démonter)

IV Autres résultats à mettre

Définition 67. *$\sum u_n$ est dite alternée si elle peut s'écrire comme $\sum(-1)^n a_n$, où $a_n \geq 0$.*

Théorème IV .1. *Critère des séries alternées*
Soit a_n suite à termes positifs, décroissante, convergeant vers 0. Alors $\sum(-1)^n a_n$ converge, et les restes vérifient : $|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq a_{n+1}$.
En particulier, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ a le signe de a_0

A mettre absolument : somme d'Abel (application : séries trigo)

LEÇON 232

MÉTHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION F(X) = 0. EXEMPLES.

Références Héron, Ciarlet, Demailly

Développements Newton ; Gradient à pas optimal (Gersgorin)

Motivation / speech à l'oral

I Cas général $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

I .1 En dimension 1

Existence de solutions : TVI

Méthode de la dichotomie

Méthode de la sécante Si inspiré

Méthode de Newton

I .2 En dimension n

Point fixe

Newton

Définition 68. *$F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$ On définit par récurrence la suite (X_k) par :*

$$\left\{ \begin{array}{rll} X_0 & = X & X \in U \\ F(X_k) + \nabla F(X_k)(X_{k+1} - X_k) & = 0 & \nabla F(X_k)\text{jacobienne} \end{array} \right.$$

Théorème I .1. *Si $X^* \in U$ tel que $F(X^*) = 0$ et $\nabla F(X^*)$ est inversible, alors $\exists \delta > 0$ tel que $\forall X \in B(X^*, \delta)$, (X_k) est bien définie et converge vers X^*.*

Rq : la convergence est quadratique.

II Cas des systèmes linéaires AX=B

II .1 Méthodes de résolution directe

Mise sous forme triangulaire supérieure : Méthode de Gauss

II .2 Résolution itérative

III Cas F polynômiale

III .1 Principe

Galois : pas résoluble par radicaux.

Définition 69. *Matrice compagnon*

Les valeurs propres de C(P) son les racines de P.

III .2 Approximation de valeurs propres : méthode QR

trop compliqué ?

III .3 Localisation des valeurs propres

Recaser Gersgorin.

LEÇON 233

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE : RÉSOLUTION APPROCHÉE DE SYSTÈMES LINÉAIRES, RECHERCHE DE VECTEURS PROPRES, EXEMPLES.

Références Serre (Matrices), Héron (Analyse numérique), Schwartzmann (Analyse numérique), Filbet (Analyse numérique)

Développements

- Gersgorin (Serre, Matrice)
- Gradient à pas optimal
- (Newton pour inverser matrices)

Rapport jury (2015) Cette leçon puise une bonne part de son contenu dans le programme complémentaire de l'oral, commun aux différentes options. Les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont bien sûr centrales pour ce sujet où le rôle du conditionnement dans l'étude de sensibilité des solutions de systèmes linéaires doit être bien identifié. L'analyse de convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, en identifiant leurs avantages par rapport aux méthodes directes, trouve naturellement sa place dans cette leçon, tout comme l'étude d'algorithmes de recherche d'éléments propres, avec la méthode de la puissance (ou la méthode QR) et des applications à des matrices vérifiant les hypothèses des théorèmes de Perron-Frobenius. Le cas particulier des matrices symétriques définies positives doit amener à faire le lien avec les problèmes de minimisation et les méthodes de gradient. On notera d'ailleurs que de tels développements peuvent aussi être exploités avec bonheur dans la leçon 226. Les techniques d'analyse permettent aussi l'investigation des propriétés spectrales de matrices et la localisation de valeurs propres de matrices (théorème de Gershgörin, suites de Sturm). Le jury encourage les candidats à illustrer leur propos d'exemples pertinents issus de la théorie de l'interpolation ou de la résolution approchée de problèmes aux limites, incluant l'analyse de stabilité de méthodes numériques.

Motivation / speech à l'oral

I Rappels d'analyse matricielle

I .1 Norme subordonée

I .2 Rayon spectral

I .3 Conditionnement

II Recherche de valeur et vecteurs propres

En théorie : polynôme caractéristique puis prendre ses racines. Mais c'est une impasse (pas de formule si $n \geq 5$ et calculer un déterminant prend du temps).

II .1 Localisation de valeurs propres

Gersgorin

II .2 Méthode QR

II .3 Méthode de la puissance

III Solutions approchées de systèmes linéaires

III .1 Méthode directes

Mise sous forme triangulaire supérieure : Méthode de Gauss

III .2 Résolution itérative

III .3 Méthode de Newton

Avec l'application pour inverser une matrice (dans ROuvière ? ?)

LEÇON 234

ESPACE $L^P, 1 \leq P \leq +\infty$

Référence :
Spierglas, Mathématiques Analyse L3
Candelpergher, Calcul Intégral

Remarque : On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

I Définition ; caractère d'evn ; colmplétude ; cas $p = \infty$

I .1 Espaces vectoriel $\mathcal{L}^p$; relation d'inclusion

Définition 70. *Pour tout p* > 0 *on définit* $\mathcal{L}^p = \{f : (X, A) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))\ mesurable\ /\ \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$. *C'est un* $\mathbb{K}$*-ev. On note* $||f||_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$

Définition 71. *Pour* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ *on définit le sup essentiel de f :* $supess(f) := inf\{M > 0/\mu(|f| > M) = 0\}$*, noté* $||f||_\infty$*. et* $L^\infty = \{f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}, ||f||_\infty < +\infty\}$

Définition 72. *Lorsque* μ *est la mesure de comptage sur* $\mathcal{P}(X)$*, on note* $l^p(X)$ *l'espace* $\mathcal{L}^p(X)$.

Proposition I .1. *Si l'espace X est de mesure finie, alors les espaces* $\mathcal{L}^p$ *sont décroissants pour l'inclusion.*

Proposition I .2. *Si I est un ensemble quelconque d'indice, les espaces* l^p *sont croissant avec l'exposant p.*

I .2 Inégalités de convexité

Proposition I .3. *Inégalité de Holder, Minkovski*

Proposition I .4. *Minkovski dénombrable*

Proposition I .5. *Jensen (pour mesure finie uniquement ? ? ? voir énoncé dans Rudin)*

I .3 Espaces L^p

Pb : $\mathcal{L}^p$ est un espace semi-normé
Solution : quotienter par la relation d'équivalence : $f \equiv g \iff f = g \quad p.p$

Définition 73. $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\{||.||_p = 0\}$

Théorème I .6. *Riesz-Fisher*
L^p *est un espace de Banach.*

Rq : $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel semi-normé complet
Complétude : Baire (passage local au global pour certaines propriétés), théorème du point fixe (construction de solution d'équation), prolongement d'application uniformément conveergentes.

I .4 Cas particulier $p = \infty$

Définition 74. *Soit f fonction de X dans la droite réelle achevée. Un majorant essentiel de f est un $m \in \mathbb{R} \bigcup \{+-\infty\}$ tel que $\{f > m\}$ est négligeable. L'ensemble des majorants essentiels de f est noté M(f).*

Lemme I .7. *Soit f de X dans $\mathbb{R}$. M(f) est de la forme $[m_0, +\infty]$*

Définition 75. *La borne inférieure m_0 de M(f) est appelée borne supérieure essentielle et notée supess(f).*

Définition 76. *$f : X \to \mathbb{C}$ est dite essentiellement bornée si $supess|f| < \infty$. On note alors $||f||_\infty = supess(|f|)$. On note $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$ mesurables et essentiellement bornée.*

Remarque : $||f||_\infty \leq ||f||_u$ mais pas égalité. Prendre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Proposition I .8. *$\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel, $||.||_\infty$ est une semi-norme et $(L^\infty, ||.||_\infty)$ est complet.*

Définition 77. *On note L^∞ l'espace quotienté $\mathcal{L}^\infty / KER||.||_\infty$.*

Proposition I .9. *$(L^\infty, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.*

II Convergence dans L^p. Partie denses. Dual

II .1 Convergence de fonctions en norme p, lien avec la convergence simple

Convergence : si convergence dans L^p, alors existence d'une suite extraite qui converge p.p
TCD : Si convergence p.p et domination, alors convergence dans L^p.

II .2 Cas particulier de la mesure finie

Exemple : en proba Dans toute cette partie, A est de mesure finie.

Proposition II .1. *Inclusion des Lp si mesure finie (preuve : Holder)*

Proposition II .2. *Soit A de mesure finie. La convergence dans L^p entraine celle dans L^q si $p > q$.*

- On n'a pas $L^1(A) = L^2(A)$. prendre $x \to 1/\sqrt{x}$ sur A=]0,1[.
- Convergence dans L^1 n'implique pas celle dans L^2. Prendre $f_n = \sqrt{n} 1_{[0,1/n]}$
- Si f bornée dans $L^1(A)$, alors f est dans $L^2(A)$ car $|f|^2 \leq (sup(|f|))|f|$.
- Toute fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$ est limite au sens de la norme 2 de $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \bigcup L^2(\mathbb{R})$. Poser $f_n = 1_{[-n,n]} f$. Les f_n sont dans L^2 et dans L^1.

Attention convergence dans L^2 implique convergence dans L^1, mais réciproque fausse.

II .3 Sous espaces denses

Densité des fonctions étagées, des fonctions en escalier, des fontions continues à support compact, des polynômes trigonométriques.

II .4 Dual

représentation de Riesz

III Produit de convolution ; approximation de fonctions

[Candelpergher]
But : régularisation des fonctions

III .1 Définition ; régularisation par la convolution

Définition 78. *Si f et g sont deux fonctions quelconques, on appelle produit de convolution de f par g la fonction (si elle est bien définie) :* $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$

Théorème III .1. *Soient* $f \in L^1$ *et* $g \in L^p$*. Alors* $f * g \in L^p$ *et* $||f * g||_p \leq ||f||_1||g||_p$.

Le produit de convolution est commutatif (et aussi associatif (preuve : Fubini), mais plus simple à montrer avec du Fourier). L'application $(f, g) \to f * g$ *est bilinéaire*

Rq/Pb : La convolution est une fonction de L^1, à priori pas continue !

Proposition III .2. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *on note* τ_a *l'application translation :* $\tau_a f(.) = f(. - a)$

Soient f et ϕ *dans* L^1*. Alors :* $\tau_a(f * \phi) = f * \tau_a\phi = \tau_a f * \phi$

Cela permet de transférer les propriétés de dérivabilité de ϕ à $f * \phi$: le produit de convolution est régularisant.

Théorème III .3. *Soient f dans* L^1 *et* ϕ *continue bornée sur* $\mathbb{R}$*. La fonction* $\phi * f$ *est définie sur tout* $\mathbb{R}$ *et est continue bornée sur* $\mathbb{R}$.

Si ϕ *est dérivable et sa dérivée est conitnue bornée sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\phi * f$ *est dérivable, sa dérivée est continue bornée sur* $\mathbb{R}$ *et on a :* $\dagger(\phi * f) = (\dagger\phi) * f$.

Définition 79. *On dit que* ϕ *est* C^∞ *à support compact sur* $\mathbb{R}$ *si .... On note* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions* C^∞ *à support compact sur* $\mathbb{R}$.

Exemple : $\phi(x) = \exp(\frac{-1}{(x-a)(x-b)})1_{]a,b[(x)}$

Théorème III .4. *Théorème de régularité*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *et* $f \in L^1$*, alors* $\phi * f$ *est inféfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :* $\dagger^n(\phi * f) = (\dagger^n\phi) * f$

En général pas à support compact, sauf si f aussi de support compact.

Proposition III .5. $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec p,q conjugués, alors* $f * g$ *est bornée uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $||f * g||_\infty \leq ||f||_p||g||_q$.

De plus, si $1 < p < \infty$ *alors* $\lim -|x| \to \infty f * g(x) = 0$.

Proposition III .6. *Si* $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *et* $f \in L^1$ *alors* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$

III .2 Approximation de l'unité

Définition 80. *Suite régularisante*

On appelle suite régularisante toute suite (rho_n) *de fonctions telles que :* $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$*, Supp*$(rho_n) \in B(0, 1/n)$*,* $rho_n \geq 0$ *et* $\int \rho_n = 1$.

Théorème III .7. $\forall 1 \leq p < +\infty, \forall f \in L^p(\mathbb{R}), \rho_n * f \to f$ *dans* $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème III .8. *Théorème de densité L'espace* $\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ *est dense dans l'espace normé* L^p.

Application : Lemme de Riemann-Lebesgue (intégrales d'une fonction oscillante).

Corollaire III .9. $\forall\Omega$ *ouvert de* $\mathbb{R}$*,* $C_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Application :

Théorème III .10. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov : Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *ouvert et soit* $\omega \subset\subset \Omega$*. Soit* $\mathcal{F}$ *un sous-ensemble borné de* $L^p(\Omega)$ *avec* $1 \leq p < \infty$*. On suppose que* $\forall\epsilon > 0\exists 0 < \delta < dist(w, \Omega^c))$ *tq* $||\tau_h f - f||_p < \epsilon\forall h < \delta\forall f \in \mathcal{F}$*. où* $\tau_h f(.) = f(. - h)$

III .3 Régularisation de la gaussienne

IV Autres idées

Compacité : Ascoli – Riesz Frechet Kolmogorov.
Espace L^2 : caractère de Hilbert.
Fourier : mais rajoute une grosse partie.

LEÇON 235

PROBLÈMES D'INTERVERSION DE LIMITES ET D'INTÉGRALES.

Références Candelpergher (Willem)

Développements

- Chaleur périodique
- Récurrence marche aléatoire
- Riesz Fischer
- Espérance conditionnelle (utilise convergence monotone.. un peu limite quand même)
- Formule sommatoire de Poisson

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral

I Limite et intégrale / Des théorèmes de convergence

[Willem]

I .1 Convergence monotone

Théorème I .1. *Convergence monotone de Lévi*

Application : espérance conditionnelle en proba.

I .2 Lemme de Fatou

Théorème I .2. *Lemme de Fatou*

Application : X_n et X v.a à densité respective h_n et h. Si h_n convergence simplement vers h, alors X_n converge en loi vers X (Ref : Ycher, Maths appliquées).

I .3 Convergence dominée

Théorème I .3. *Convergence dominée de Lebesgue*

Mettre une application pas trop bidon.
Éventuellement mettre les théorèmes de continuité, dérivabilité sous le signe somme. Éventuellement l'holomorphie sous $\int$.
Parler d'interversion séries/intégrales

I .4 Interversion de l'ordre de sommation

Fubini Tonelli.

II Des problèmes d'interversion dans les Banach

II .1 Un théorème de base : Riesz Fischer

Théorème II .1. *E evn. E Banach ssi toute série normalement convergence est convergente*

Théorème II .2. *L^p est complet*

La preuve s'appuyant sur le théorème précédent, ça rentre dans la leçon (on va intervertir des sommes et intégrales, vu que la norme p est une intégrale).

II .2 Convolution

Théorème II .3. *Régularisation par la convolution*

II .3 Transformation de Fourier

On insiste sur le fait que la TF fait le lien entre les dérivées et la décroissance en l'infini.
TF transforme produit de convolution en produit est une application de Fubini.
Mettre le lemme de Riemann Lebesgue : $TF(L^1) \subset C_0^0$.
La TF est définie dans L^1, on peut l'étendre à L^2 (par exemple en passant d'abord dans S, puis la densité de S dans les L^p est une application de la convolution).

II .4 Formule sommatoire de Poisson

La caser ici (ou autre part, mais où ?). Application au peigne de Dirac et à Shannon.

III En probabilité

Convergence en loi c'est une sorte d'interversion de limite intégrales non ?
Théorème de Lévy doit pouvoir trouver sa place ici aussi.
On peut parler des liens entre les différents modes de convergence, et que les L^p sont emboités.

LEÇON 236

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES.

Références Gourdon, Candelpergher

Développement Méthode phase stationnaire (Candelpergher)
Un truc avec inversion Fourier

Motivation / speech à l'oral [Gourdon p.119] Théorie de l'intégration prend sa source dans le calcul d'aire. Archimède : aire sous une parabole ou une droite.

fin 17ème siècle. Newton : calcul aire de la courbe y=f(x) en inversant les opérations de dérivation (ie calcul de primitive). C'est le premier exemple que l'on donne.
Leibniz : interprète aire comme sommes de rectangles infinitésimaux (cf dernières partie, calcul approchés).

Puis Cauchy, Riemann formalisent tout cela avant l'arrivée de Lebesgue (début 20ème).

Plan en deux parties, qui mettent en avant des idées différentes. Le calcul exact est bien beau, mais parfois ne s'applique pas, mais on veut savoir comment se comporte notre objet : étude asymptotique (Laplace, phase stationnaire), ou approchée (Monte Carlo). On fera gaffe à estimer l'erreur faite.

I Métthodes exactes

I .1 Manipulations algébriques et analytiques

Théorème fondemental de l'analyse Exemple
Bon c'est quand même un cas hyper cool. N'arrive jamais en vrai.

Décomposition en éléments simples Il existe plein de variantes avec polynôme en cosinus sinus, en exponentielle, ou produit polynôme par exponentielle. Mais ça prend plein de place pour un intérêt limité. Voir le Gourdon p.133.

IPP Application : intégrales de Wallis.

Changement de variables Passage en coord polaires, sphériques, cylindrique

Calcul volume de la boule unité

Proba : théorème de transfert

I .2 Fubini Tonelli

Application : intégrale gaussienne

I .3 Utilisation d'un paramètre supplémentaire

Entier

Théorème I .1. *Convergence dominée*

Exemple : $\lim \int_{]0,\infty[} \frac{ne^{-nx}}{1+x^2}$

Réel

Théorème I .2. *COontinuité dérivabilité sous le signe* $\int$

Application : trouver une équa diff vérifiée par l'intégrale (ex : intégrale gaussienne).

I .4 Changement de point de vue

Analyse complexe

Analyse harmonique (de Fourier) Théorème de Plancherel.

II Méthodes approchées

II .1 Etudes asymptotiques

Méthode de Laplace

Théorème II .1. ...

Application : formule de Stirling

Méthode de la phase stationnaire

Théorème II .2. *Soient ϕ et f de classe C^∞ réelles sur [a,b]. Si la phase de ϕ est stationnaire ($\phi'(t_0) = 0$) en un unique point $t_0 \in [a, b]$, et si ce point est intérieur à [a,b] tel que $\phi''(t_0) \neq 0$, alors pour $x \to +\infty$:*

$$\int_a^b e^{i\phi(t)} f(t)dt = e^{ix\phi(t_0)} f(t_0) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\phi''(t_0)|}} e^{sgn(\phi''(t_0) i\pi/4)} \frac{1}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x})$$

II .2 Intégration numérique

Monte Carlo Simple / Rejet

Remarque : Convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, moins bien que les méthodes classiques, mais marche pour des fonctions très discontinues et se généralise très bien en dimension supérieure (sans être plus lent).

LEÇON 240

PRODUIT DE CONVOLUTION, TRANSFORMATION DE FOURIER. APPLICATIONS.

Références (Candelpergher), Bony, Zuily, (Godement), Zuily Queffelec, Willem

Développements Shannon, équation de la chaleur.

Motivations / Speech à l'oral Convolution arrive naturellement en physique (réponse de systèmes dynamique ; en élec s=K*e où e signal d'entrée, s sortie).

Une des propriétés importante de la convolution réside dans régularisation de fonctions. Heuristiquement, c'est parce que l'on moyenne f sur un intervalle autour (lorsque l'on convole par une fonction à support compact), donc on gomme les irrégularités. Convolution presque un groupe, mais on n'a pas de neutre ; néanmoins on peut approximer l'unité, ce que l'on fait par des suites de fonctions C^∞.

Pour la TF motivation = étendre ce que l'on connait sur les séries de Fourier à des fonctions non continues. Sur L^1 on définit naturellement. Mais la TF d'une fonction intégrable tend vers 0 en l'infini (Riemann Lebesgue), donc TF n'est pas isomorphisme de L^1.

Une difficulté vient que les espaces L^p ne sont pas emboités, donc pour généraliser à L^2 on procède par densité. Non seulement L^2 est un Hilbert, mais en plus la TF est un isomorphisme de L^2.

L'autre possibilité évoquée ici est de se restreindre à S, pour ensuite passer dans le dual S'. Applications aux EDP, avec développement eq chaleur.

I Produit de convolution

[Candelpergher p.289] [Bony p.77]

I .1 Définition et propriétés

Théorème I .1. *f,g dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la convolution par :*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

Elle est définit presque partout sur R, et $f * g \in L^1$, $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.

Démonstration. Fubini. □

Proposition I .2. *Le produit de convolution est commutatif. Il est aussi associatif (mais c'est plus simple de le montrer via transformation de Fourier).*

Remarque : autrement dit il ne manque que le neutre pour avoir un groupe.

Proposition I .3. *Soit τ_a l'application translation $x \to \phi(x-a)$. Soit $f, \phi \in L^1$, on a :*

$$\tau_a(f * \phi) = f * \tau_a \phi = \tau_a f * \phi$$

Démonstration. Changement de variable. □

Théorème I .4. *$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ϕ continue bornée sur $\mathbb{R}^n$, alors :*

$$(\phi * f)(x) = \int \phi(x-y)f(y)dy$$

est définie sur tout $\mathbb{R}^n$, et est continue bornée.

On a $\phi * f = f * \phi$

Si ϕ est dérivable, et sa dérivée est continue bornée, alors $\phi * f$ aussi et sa dérivée est continue bornée sur R, et on a :

$$\partial(\phi * f) = (\partial\phi) * f$$

Démonstration. $\phi(x-y)f(y)$ intégrable par majoration, et l'intégrale est bornée (majorer par $\sup(|\phi|)||f||_1$).

Changement de variable pour montrer l'associativité.

Dérivation sous signe $\int$. □

Théorème I .5. *Inégalité de Young*

Soit $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, alors $||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q$,

Si $f \in L^p$ $g \in L^q$, alors $f * g \in L^r$

Démonstration. $|f(y)g(x-y)| \leq (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{1/r} |f(y)|^{p(1/p-1/r)} |g(x-y)|^{q(1/q-1/r)}$ □

Cas particulier :

p=1 q=1 $\Rightarrow$ r=1

p=1 q quelconque $\Rightarrow$ r=q

$p = \infty$ q=1 $\Rightarrow r = \infty$.

I .2 Régularisation par convolution

Définition 81. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty$ fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.*

Exemple : $\phi(x) = \exp(-\frac{1}{(x-a)(x-b)})1_{]a,b[}(x)$

Théorème I .6. *Théorème de régularité*

$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f \in L^1$, alors $\phi * f \in \mathcal{C}^\infty$ et on a :

$$\partial^n(\phi * f) = (\partial^n\phi) * f$$

Par contre pas à support compact.

Exemple : ϕ comme ci dessus et $f(x) = \exp(-x^2)$, alors

$$(\phi * f)(x) = \int_a^b \phi(y)\exp(-(x-y)^2)dy$$

cette dernière fonction est positive (strictement) pour tout x.

Rq : si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f \in L^1$ et nulle en dehors d'un intervalle $[-M, M]$, alors $\phi * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Définition 82. *Suite approximant l'unité :*

1/ $\phi_n \geq 0$

2/ $\int \phi_n = 1$

3/ $\forall\eta > 0 \quad \int_{|x|>\eta} \phi_n \to_n 0$

Cas particulier :

$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive à support dans $[-1, 1]$ telle que $\int \phi = 1$. Alors la suite (ϕ_n) est une approximation de l'unité dans $\mathcal{D}$:

$$\phi_n(x) = n\phi(nx)$$

Théorème I .7. *Approximation par convolution*

Soit $(\phi_n) \in \mathcal{D}$ une approximation de l'unité.

1/ Si $f \in L^p$ (avec $1 \leq p < \infty$), alors $\phi_n * f$ forment une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent vers f dans L^p.

$$||\phi_n * f - f||_p \to 0$$

2/ Si $f \in L^p$ nulle en dehors d'un intervalle $[-M, M]$, alors 1 est vrai avec en plus $\phi_n * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3/ Si f uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (notamment si f est continue à support compact), alors $f * \phi_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration. 1/ Voir Candelpergher.
2/ vient de la remarque précédente.
3/ Bony p.80 □

Remarque : La suite ϕ_n est appelée approximation de l'unité.

Théorème I .8. *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^1(\mathbb{R}), ||;||_1)$, ainsi que dans $(L^p(\mathbb{R}), ||.||_p)$ pour tout $p \geq 1$.*

Rq : faux pour p=∞, car limite uniforme de fonction continues est continue.

Théorème I .9. *Riemann-Lebesgue*
I intervalle de R, f intégrable sur I.

$$\int_I \exp(itx)f(x)dx \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to \pm\infty$$

Démonstration. Facile à montrer pour une fonction dérivable (IPP) puis on peut utiliser la densité de D. □

Exemple explicite d'approximation de l'unité

Définition 83. *Gaussienne normalisée de largeur δ :*

$$g_\delta = \frac{1}{\delta\sqrt{(2\pi)}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

Proposition I .10.

$$g_\delta * g_{\delta'} = g_{\sqrt{\delta^2+\delta'^2}}$$

Démonstration. Calcul. □

Théorème I .11. *Régularisation gaussienne*

$$f \in L^1 \quad f * g_\delta \to f \quad \textit{quand} \quad \delta \to 0$$

I .3 Application : construction de fonctions plateau, partition de l'unité

II Transformation de Fourier

II .1 TF dans L^1

Définition 84.

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int \exp(-2i\pi\xi x)f(x)dx$$

Proposition II .1. *1/ F conserve la parité*
2/

$$\int (\mathcal{F}f)g dx = \int f(\mathcal{F}g)dx$$

3/ FD = MF (D opérateur dérivé, M multiplication au facteur $2i\pi$ près)
4/ DF = FM
5/ $\mathcal{F} \in C_0^0$ (fonction continue tendant vers 0 en l'infini), mais en général pas dans L^1.

Proposition II .2. *Exemple de calculs explicites de TF*
Par exemple porte, triangle, ainsi que la gaussienne :

$$\int \exp(-2i\pi\xi x)\exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\pi^2\xi^2/a)$$

Démonstration. Résidu ou equa diff. □

Proposition II .3. *Lien TF et convolution. $f, g \in L^1$*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

Proposition II .4. *Injectivité*

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}g \Rightarrow f = g \quad \textit{dans } L^1$$

Par contre pas surjectif, même de L^1 dans C_0^0.

Théorème II .5. *Théorème d'inversion de Fourier*

$$f(x) = \int \exp(2i\pi\xi x)\mathcal{F}f(\xi)d\xi$$

Théorème II .6. *Formule sommatoire de Poisson*

+ exemples/applications à des sommes classiques (Zuily Queffelec)

II .2 TF dans S

On se restreint d'abord à S (espace "petit"), pour pouvoir étendre la TF à L^2 puis à S' (espace beaucoup plus gros)

Définition 85. *On dit que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $\phi \in C^\infty$ et ϕ est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.*
Cad les

$$N_p(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_\infty$$

sont finies pour tout p.

Rq : $C_c^\infty \subset S \subset C^\infty$
$P(x)\exp(-x^2) \in S$ où P est un polynôme.

Définition 86. *S est stable par dérivation et multiplication par des polynômes. Les fonctions de S sont dans L^1 et tendent vers 0 en l'infini, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$\forall \phi \in S \qquad \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_{L^1} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi)$$

Théorème II .7. *1/ La TF applique S dans lui même, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$N_p(\hat{\phi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\phi)$$

2/ La TF est un isomorphisme de S dans lui même d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$

Lemme II .8. *$\phi \in S$. Alors $\hat{\phi} \in C^1$ et :*

$$\partial_j(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}(-2\pi i x_j \phi(x))$$

$$\mathcal{F}(\partial_j \phi) = i2\pi\xi_j\hat{\phi}(\xi)$$

II .3 TF dans L^2

On va étendre la TF à L^2, qui est un Hilbert, et rend la vie facile. On ne peut plus invoquer la formule, mais on la construit par prolongement via la densité de D dans L^2.

Lemme II .9. *$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}\phi \in L^2$ et*

$$||\mathcal{F}\phi||_2 = ||\phi||_2$$

Théorème II .10. *(énoncé pas optimal du tout, à re rédiger !)*
$f \in L^2$. Alors $f = \lim_n \phi_n$ où les ϕ_n sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posons :

$$\mathcal{F}f = \lim_n \mathcal{F}\phi_n$$

La limite existe et est indépendante de la suite (ϕ_n) choisie ; elle définit un élément de L^2.

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

est une application linéaire continue telle que $||\mathcal{F}f||_2 = ||f||_2$ (isométrie), d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.
Enfin, si f et g sont dans L^2, on a :

$$(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g) = (f|g)$$

$$\int (\mathcal{F}f)g dx = \int f(\mathcal{F}g)dx$$

Théorème II .11. *Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors les deux transformées de Fourier coïncident :*

$$\mathcal{F}f = \hat{f}$$

Définition 87.
$$BL^2 := \{f \in L^2 : \hat{f} = 0 \text{ p.p hors de }]-1/2, 1/2[\}$$

Théorème II .12. *1/ BL^2 est un Hilbert.*
2/ Toute fonction de BL^2 possède un représentant continu.
3/ $(sinc(.-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.
4/ $\forall u \in BL^2 \quad u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)sinc(x-k)$

III Un point de vue unificateur : les distributions

III .1 Espace des distributions trempérées

Définition 88. *S' le dual topologique de S. Pour $T \in S'$ et $\phi \in S$, on note $< T, \phi >$ au lieu de $T(\phi)$.*

Lemme III .1. *Une application linéaire est dans S' ssi*
$$\exists p \in \mathbb{N}, C > 0 : \forall \phi \in S, | < T, \phi > | \leq CN_p(\phi)$$

Définition 89. *Le plus petit p vérifiant le lemme s'appelle l'ordre d'une distribution tempérée T.*

Exemples : fonctions L^p, δ_x, vp(1/x) sont dans S'.

Définition 90. *Dérivation dans S' : $< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$*

Proposition III .2. *Formule des sauts*

III .2 TF dans S'

[Bony]

Définition 91. $T \in S', < \hat{T}, \phi >=< T, \hat{\phi} >$

Proposition III .3.
$$\forall T \in S' \quad \hat{T} \in S'$$

Proposition III .4. *Si $f \in L^1$, alors $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$*

Théorème III .5. *La transformation de Fourier est un homéomorphisme de S' dans S'.*

Proposition III .6. *$\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ est une distribution tempérée. On a par la formule de Poisson $\hat{\Delta} = \Delta$.*

Théorème III .7. *Théorème d'échantillonnage de Shannon (Développement)*
$f \to f\Delta$ est injective sur BL^2 et
$$f = \mathcal{F}^{-1}(1_{[-1/2,1/2]}\widehat{f\Delta})$$

(La multiplication de f par Δ revient à échantillonner f avec une fréquence constante. Le théorème précédent assure qu'après échantillonnage, on peut retrouver la fonction de départ avec à condition que la fréquence d'échantillonnage ne soit pas trop faible)

III .3 Application à la résolution d'EDP

Définition 92. *$u \in S'$ $\phi \in S$. Alors leur produit de convolution est :*
$$(u * \phi)(x) =< u(y), \phi(x-y) >$$
et est dans l'ensemble des fonctions C^∞ à croissance au plus polynômiale en l'infini.
De plus, $\partial^\alpha(u * \phi) = u * (\partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi$

Soit f une distribution tempérée. On s'intéresse aux équations aux dérivées partielles à coefficients constant :
$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \tag{240.1}$$

Définition 93. *$E \in S'$ est solution fondamentale de 240.1 si :*
$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0 \tag{240.2}$$

Intérêt : Si on a trouvé une telle solution E (pas forcément unique), alors $(E * f)$ solution de 240.1. (calcul facile).
Une manière de procéder est de prendre la TF de 240.2, qui devient alors :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (2i\pi\xi)^\alpha \hat{E}(\xi) = 1 \tag{240.3}$$

ie $P\hat{E} = 1$ où $P(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (2i\pi\xi)^\alpha$.
Si 1/P est une distribution tempérée, on peut poser : $E = \mathcal{F}^{-1}(1/P)$ et on obtient une solution fondamentale.
Application : Équation de la chaleur (développement)

LEÇON 244

FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE, FONCTIONS ANALYTIQUES. EXEMPLES.

Référence : Marco, Candelpergher
Pommeler, Objectif agrégation
Développements : Lemme de Borel (Rouvière)

I Fonction analytiques réelles

I .1 Développement en série entière d'une fonction en un point

Définition 94. *Une fonction f (à variable réelle) est dite développable en série entière en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n \quad \textit{sur}\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Proposition I .1. *Si f est DSE_{x_0}, alors f est C^∞ et $\forall k\ a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$*

Définition 95. *f est dite analytique sur I si elle est développable en série entière pour tout x dans I.*

Exemples : sinx, sinx/x, P polynômes, 1/P où P polynôme ne s'annulant pas sur I.

Proposition I .2. *Zéros isolés.*

Proposition I .3. *Si f admet un DSE enx_0, de rayon de convergence ρ, alors f est analytique sur $I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$*

I .2 Propriétés des fonctions analytiques

Proposition I .4. *Formule de Taylor avec reste intégral*

Théorème I .5. *(Pas sur de l'énoncé exact, à verifier ! ! !)*
Si f C^∞ sur I intervalle de $\mathbb{R}$,

$$f \textit{ analytique sur } I \iff \forall x_0\ \exists V \textit{ voisinage de } x_0\ |\frac{f^p(x)}{p!}| \leq M x_0^p\ \forall p \geq 0\ \forall x \in V$$

Remarque : En pratique, on prouve que le reste de Taylor tend vers 0 pour montrer que f est analytique. Le théorème précédent montre le contrôle des dérivés à tout ordre.

Théorème I .6. *Si f analytique sur I intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- $f^{(n)}(x_0) = 0$
- *f est nulle au voisinage de x_0*
- *f est nulle sur I*

I .3 Lien entre fonction analytique et fonction C^∞

On a vu analytiqe implique C^∞. La réciproque est fausse (cf contre exemples donnés). On peut aller encore plus loin.

Lemme I .7. *Lemme de Borel*

$$\forall (a_n) \textit{ suite de } \mathbb{R}\ \ \exists f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \textit{ telle que } f^{(k)}(0) = a_k$$

II Analyticité sur $\mathbb{C}$

II .1 Définition

Proposition II .1. *Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et si la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence R non nul, elle définit dans le disque $D(z_0, R)$ une fonction*

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$$

qui est indéfiniment dérivable dans $D(z_0, R)$. La série $\sum a_n(z-z_0)^n$ n'est autre que la série de Taylor de f en 0 :

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

III Construction génériques

[Candelpergher]

III .1 Analycité sous le signe $\int$

Théorème III .1. *Théorème d'analycité de Lebesgue.*
Soit I intervalle de R et U ouvert de C.
1) Pour tout z dans U, $x \to f(z,x)$continue sur I
2) Pour tout x de I, $z \to f(z,x)$ est analytique sur U
3) Pour tout compact K dans U, il existe g positive intégrable sur I, telle que $|f(z,x) \leq g(x)\ \forall x \in I\ \forall z \in K$
Alors la fonction $\phi : z \to \int_I f(z,x)dx$ est analytique sur U et $\forall z_0 \in U\ \phi'(z_0) = \int \partial_z f(z,x)dx$

III .2 Suites et séries de fonctions analytiques

Théorème III .2. *(f_n) suite de fonctions analytiques sur U. On suppose que $\forall z \in U, (f_n(z))$ converge et on pose $f(z) = \lim f_n(z)$. Si*

$$f_n \to f \text{ uniformément sur tout compact K de U}$$

Alors f est analytique sur U et pour tout $z \in U$ on a :

$$f'(z) = \lim f_n'(z)$$

Théorème III .3. *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions analytique sur U, on suppose que cette série converge uniformément sur tout compact de U. Alors sa somme est analytique sur U et pour tout $z \in U$ on a :*

$$(\sum u_n)'(z) = \sum u_n'(z)$$

Démonstration. On applique le thm précédent aux sommes partielles qui convergent uniformément sur tout compact. □

Remarque : on peut en fait dériver sous le signe somme autant de fois que l'on veut ! car la cv unif de f_n sur tout compact entraine aussi celle de f_n'

IV Fonctions développable en série entière. Fonctions analytique.

IV .1 Série entière.

Définition 96. *Série entière*

Lemme IV .1. *Lemme d'Abel*
S'il existe z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge lorsque $|z| < |z_0|$.

Démonstration. $|a_n z^n| = |a_n z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$ □

Proposition IV .2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et ρ la borne supérieure de l'ensemble des réels positifs r tel que $\sum |a_n| r^n$ converge. Alors :*

- *La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D(O,\rho)$ et est divergente si $|z| > \rho$.*
- *La série de fonction $\sum a_n z^n$ converge normalement sur les compacts contenus dans $D(O,\rho)$. Sa somme S définit donc une fonction continue dans $D(O,\rho)$.*

Exemple : $|x|$ n'est pas DSE en 0.

Proposition IV .3. *Formule d'Hadamard*

Proposition IV .4. *La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est infiniment dérivable au sens complexe dans $D(0, \rho)$ où ρ est le rayon de convergence.*

En particulier, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. LEs coefficients a_n sont complètement déterminés par la somme de la série.

Proposition IV .5. *Inégalités de Cauchy*

$|a_n|r^n \leq M$ *où M majorant de ? ? ?*

Proposition IV .6. *Zéros isolés*

IV .2 Fonctions analytiques

Définition 97. *U ouvert de $\mathbb{C}$ et f fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique dans U lorsque pour tou t$z_0 \in U$, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho > 0$ et un réel $\epsilon \in]0, \rho[$ tel que $\forall z \in D(z_0, \epsilon)$,*

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$$

Cette série entière est alors unique et est appelée le développement en série entière de f centré en z_0.

Proposition IV .7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors, sa fonction somme est analytique dans $D(0, \rho)$.*

Démonstration. à rédiger, découle de la définition de μ. $\square$

LEÇON 247

EXEMPLES DE PROBLÈMES D'INTERVERSION DE LIMITES.

Références Candelpergher, ZQ, Gourdon, Hauchcorne, Garett-Kurtzman

Développements
- Poisson-Shannon
- Récurrence marche aléatoire
- Riesz Fischer
- Phase stationnaire
- Chaleur (périodique)

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral Partie I : Problèmes de continuité, dérivabilité, holomorphie. Ce sont bien des problèmes de limite (par exemple caractérisation séquentielle de la continuité).

Partie II : limite et intégrale. On fait le lien avec la 1ère partie via les théorèmes de continuité/dérivaboilité sous $\int$

Partie III : Des exemples en proba

I Suites et séries de fonctions

I .1 Suites et continuité

Théorème I .1. *E, F espaces métriques, f_n suite de fonction continues qui converge uniformément vers f. Alors f est continue et* $\lim_{x\to a}\lim_n f_n(x) = \lim_n \lim_{x\to a} f_n(x)$

Contre exemple : $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1[$.
$f_{n,m}(x) = \cos(n!\pi x)^{2m}$

I .2 Dérivabilité

Théorème I .2. *E Banach. $f_n \in C^1$ i) $\exists x_0 : (f_n(x_0))$ converge*
ii) $f'_n \to g$ uniformément
Alors $\exists f \in C^1$ telle que $f_n \to f$ uniformément et f'=g.

Application : différentielle de l'exponentielle de matrices.
Contre exemple : voire Hauchecorne ou Gourdon...

I .3 Séries de fonctions

Théorème I .3. *$f_n \in C^0([a, b])$ tel que $\sum f_n$ converge ubniformément sur [a,b], alors sa somme est une fonction continue sur [a,b].*

Contre exemples ...

Théorème I .4. *$f_n \in C^m$ tel que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément pour $0 \le k \le m$ alors la somme est C^m et on peut dériver terme à terme.*

Application : théorème de Borel.

I .4 Fonctions holomorphes

Théorème I .5. *$f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que $f_n \to f$ uniformément localement, alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad f_n^{(k)} \to f^{(k)}$*

II Intégrabilité et inversion de limites

II .1 Interversion d'intégrales

Théorème II .1. *Fubini*

Exemples et contre exemples.
Application : Intégrale de Gauss.

Corollaire II .2. *Interversion intégrale-somme*
(somme = intégrale pour la mesure de comptage).

LEÇON 249

SUITES DE VARIABLES DE BERNOULLI INDÉPENDANTES.

Références   Lesigne (Pile ou Face), Ouvrard (1 et 2p.54), Garet Kurtzmann

Développements

— TCL

— Marche aléatoire

Rapport jury (2015)   La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite) doivent être rappelés. La loi binomiale doit être évoquée et le lien avec la leçon expliqué.

Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations.

Motivation / speech à l'oral   Bernoulli = modélise un lancer de pile ou face.

I Premières définitions et propriétés

I .1

Définition 98. *Loi Bernoulli de paramètre p la loi* $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$.

Proposition I .1. *Les va qui suivent une loi de Bernoulli sont exactement les indicatrices d'évènements.*

Démonstration. Remarque : pour tout évènement A, 1_A suit une Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Réciproquement, si la va X suit une Bernoulli, alors elle vérifie $X(\omega) = 1_{X(\omega)=1}$. □

LEÇON 253

UTILISATION DE LA NOTION DE CONVEXITÉ EN ANALYSE.

Références Schwartz

Développements
- Gradient pas optimal
- L^p est un Banach (via inégalité de convexité comme dans Schwartz)
- Projection sur un convexe

Rapport jury (2015)

Motivation / speech à l'oral

I Convexité et premières conséquences

I .1 Ensemble convexes

I .2 Fonctions convexes et régularité

[Gourdon]

II Inégalités

II .1 Inégalités classiques

Avec exp, cos, sin.
Application : $\exp(ix^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ou plutôt calcul de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(itx)x}{1+x^2}$.
Inégalité arithémtico-géométrique

II .2 Inégalités dans les L^p

Holder, appli : inclusion des Lp quand la mesure est finie.
Minkovski. Appli : Lp sont des evn.
Minkovski généralisée ("inégalité de convexité dénombrable" par Schwartz) ; Appli : Lp complet.

II .3 En proba

Inégalité de Jensen

III Optimisation

III .1 Fonctions convexe et extremums

[Rouvière]

III .2 Optimisation numérique

Méthode de Newton, Inégalité de Kantorovich, gradient à pas optimal

III .3 Théorème de projection

[Hirsch Lacombe ou Brezis]
Projection sur un convexe fermé
Appli : espérance conditionelle [Barbe Ledoux]

LEÇON 254

ESPACES DE SCHWARTZ $S(R^D)$ ET DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES. DÉRIVATION ET TRANSFORMATION DE FOURIER DANS $S(R^D)$ ET $S'(R^D)$.

Références Bony, Schwartz

Développement Shannon, Régularité solution EDP, chaleur.

Rapport jury

Motivation / speech à l'oral Permet de donner un sens à des opérations effectuées par les physiciens, comme $\int \delta_0 f = f(0)$, et qui sont utiles en EDP.

Plus généralement, ça généralise la notion de fonctions. Exemple avec la température qui n'est pas définie ponctuellement (agitation des molécules locales, pas de sens sur une échelle inférieure au libre parcours moyen).

I L'espace de Schwartz

I .1 Définition

Définition 99. *On dit que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $\phi \in C^\infty$ et ϕ est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.*

Cad les

$$N_p(\phi) = \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_\infty$$

sont finies pour tout p.

Rq : $C_0^\infty \subset S \subset C^\infty$
$P(x)\exp(-x^2) \in S$ où P est un polynôme.

Définition 100. *S est stable par dérivation et multiplication par des polynômes. Les fonctions de S sont dans L^1 et tendent vers 0 en l'infini, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$\forall \phi \in S \qquad \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} ||x^\alpha \partial^\beta \phi(x)||_{L^1} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi)$$

I .2 Transformation de Fourier

Théorème I .1. *1/ La TF applique S dans lui même, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$N_p(\hat{\phi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\phi)$$

2/ La TF est un isomorphisme de S dans lui même d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$

Lemme I .2. *$\phi \in S$. Alors $\hat{\phi} \in C^1$ et :*

$$\partial_j(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}(-ix_j\phi(x))$$

$$\mathcal{F}(\partial_j\phi) = i\xi_j\hat{\phi}(\xi)$$

I .3

II Les distribution tempérées

II .1 L'espace S'

II .2 Transformation de Fourier

II .3

III Convolution. Application à la résolution d'EDP

III .1

III .2

III .3

IV Vrac

Définition 101. *on dit que u est une distribution tempérée ($u \in S'$) si*

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad |<u,\phi>| \leq C\mathcal{N}_p(\phi)$$

On peut remplacer la condition $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ par $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (par prolongement continu d'une forme linéaire continue définie sur un sous espace dense).

Exemple : fonctions localement sommable, majorée par un polynôme ; toute fonction sommable, ou de carré sommable. Toute distribution à support compact est tempérée.

Définition 102. *$f \in \mathcal{O}_M$ si f est C^∞ et*

$$\forall \beta \exists C_\beta m_\beta : \quad |\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta (1+|x|)^{m_\beta}$$

Proposition IV .1. *$f \in \mathcal{O}_M$.*
1/$\forall \phi \in S$ on a $f\phi \in S$.
2/$\forall u \in S'$ on a $fu \in S'$. Si $u_j \to u$ dans S' alors $fu_j \to fu$ dans S'

Théorème IV .2. *$u \in S'$. La TF de u est une distribution tempérée, notée $\mathcal{F}u$ ou $\hat{u}$ définie par :*

$$\forall \phi \in S \quad <\hat{u},\phi> = <u,\hat{\phi}>$$

Théorème IV .3. *La Tf est un isomorphisme de S' sur lui même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$*

IV .1 Construction de fonctions plateau

Théorème IV .4. *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, K compact de Ω et $\mathcal{O}$ ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$, alors il existe $\phi \in C_C^\infty$ telle que $\phi = 1$ sur K et 0 dans $\mathcal{O}^c$ et $0 \leq \phi \leq 1$.*

Remarque : en fait ce fait de manière directe (voir Bony p.74)

LEÇON 260

ESPÉRANCE, VARIANCE ET MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

Référence :
Barbe Ledoux, Probabilité
Jacob Protter
Toulouse
Durett, Probability : Theory and Examples

Rapport Jury 2015 :
Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite). Le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

Rapport 2014 : Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebichev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème limite central). Le comportement des moyennes de Cesàro pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié.
La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

Début du plan :

Dans la suite $(\Omega, A, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité, notion que l'on suppose connue.
De même, on ne rappellera pas les définitions des lois usuelles et les modes de convergence.

I Moments d'une variables aléatoire.

I .1 Moments d'ordre p

Définition 103. *Soit X une va réelle définie sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$. Si X est intégrable, on appelle son espérance la quantité réelle : $E(X) := \int_\Omega X dP$ C'est sa valeur moyenne.*

On sait que deux échantillon ayant la même moyenne peuvent provenir de lois complètement différentes : la moyenne ne caractérise pas une loi, et l'information qu'elle apporte est parcellaire. On définit alors les moments d'ordres supérieurs :

Définition 104. *Plus généralement, si $X \in L^p, p > 0$, on définit le moment absolu d'ordre p de X : $E(|X|^p) := \int |X|^p dP$.*
Si p est entier, on définit le moment d'ordre p de X : $E(X^p) := \int X^p dP$.

Vu que la mesure de l'espace est finie, les espaces L^p sont emboités. Donc si une va est de carré intégrable, elle est en particulier intégrable.

Théorème I .1. *Théorème de transport*
Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ et ϕ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
Si ϕ est à valeurs positives, $E(\phi(X)) = \int \phi(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dP^X(x)$
Si ϕ est à valeurs quelconques :

$\phi(X) \in L^1(\Omega, A, \mathbb{P}) \iff \phi \in L^1(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d, P^X))$.
Dans ce cas, l'égalité précédente a lieu.

En particulier, si X v.a. réelle intégrable, $E(X) = \int x dP^X(x)$

Proposition I .2. *Si X vecteur aléatoire à valeur dans ($\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)$) et $A \in B(\mathbb{R}^d)$, alors 1_A est mesurable et E($1_A(X)$) = P($X \in A$)*

On peut dès à présent poser la question suivante : soient X et Y deux lois ayant les même moments d'ordre p, pour tout p entier. Peut-on en conclure que X et Y ont même loi ? La réponse est non, même si les contre exemples, comme celui qui suit, sont tordus.

Proposition I .3. *Soit $a \in [-1, 1]$. Considérons Z et Z_a des v.a de densité f et f_a, avec :*

$$f_0^Z(z) = (2\pi)^{-1/2} z^{-1} \exp((-lnz)^2/2) 1_{z>0}$$
$$f_a(x) = f_0^Z(x)(1 + a \sin(2\pi lnx))$$

Alors Z et Z_a ont les même moments à tout ordre.

I .2 Fonction caractéristique et moments

Définition 105. *Fonction caractéristique*
$\phi^X(t) = E(\exp(i < t, X >)) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i < t, x >) dP^x(x)$

Théorème I .4. *La fonction caractéristique caractérise la loi (d'où son nom...)*
Si deux va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ont même fonction caractéristique, alors elles ont même loi. (L'application qui à une mesure de proba sur $\mathbb{R}^d$ associe sa transformée de Fourier est injective).

Proposition I .5. *Formule d'inversion de Fourier*
$f^X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i < t, x >) \phi^X(t) dt)$

Proposition I .6. *Lien entre fonction caractéristique et les moments*
Soit X v.a de loi P^X et fonction caractéristique ϕ^X.
(i) Si $E(|X|^n) < \infty$, alors ϕ est n-fois dérivable, de dérivé k-ième (k≤n)

$$\phi^{(k)}(t) = i^k \int x^k \exp(itx) dP^X(x) = i^k E(X^k \exp(itX))$$

En particulier, $\phi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.
(ii) Réciproquement, si ϕ n fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre 2 [k/2], donné par la même formule que précédemment.

Démonstration. (i) Idée : DL de exp(itx)
(ii) Montrer par récurrence que $E(X^{2k})$ est fini pour $2k \leq n$, puis conclure par croissance de l'application $p \to ||X||_p$. □

Dans la proposition ci-dessus, l'énoncé de la réciproque est un peu délicate. L'exemple suivant donne une fonction caractéristique dérivable en tout point, sans que la v.a n'admette une moyenne.

Démonstration. Soit X une v.a réelle de loi $P^X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$ symétrique ($a_k = a_{-k}$) telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} = \infty$. On a : $\int |X| dP = 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k = \infty$ et $\phi_X(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kt)$.
Soit (a_k) telle que $(k a_k)$ tende en décroissant vers 0.
Choisissons $a_0 = a_1 = 0$ et $a_k = \frac{c}{k^2 ln(k)}$ où $c = 1/2 \big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \big)^{-1}$.
Les hypothèses sont bien satisfaites ; a_k est le terme général d'une série de Bertrand convergente. En étant astucieux, on montre que $\phi^X(t)$ est dérivable en 0 (considérer le taux d'accroissement, et comparaison série/intégrale).
Voir Ouvrad, tome 2, p.205 pour la preuve. □

La transformée de Fourier permet de résoudre (partiellement) le problème des moments soulevé précédement :

Proposition I .7. *Soient X et Y deux v.a à valeurs dans un intervalle borné [a,b]. Si X et Y ont les même moments à tout ordre, alors elles ont même loi.*

Preuve I .8. *Approximer la fonction caractéristique par un polynôme (OK car [a,b] compact....)*

Cette preuve ne marche plus dans le cas d'une loi définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$. Néanmoins, on peut citer le résultat suivant :

Proposition I .9. *(Hamburger moment problem ; Stieltjes moment problem) Notons μ_k le moment d'ordre k d'une v.a X.*
Si $\limsup_{k\to\infty} \mu_{2k}^{1/2k} = r < \infty$, alors la suite des moments $(\mu_k)_k$ définie une unique v.a X.

I .3 Moments centrés et concentration d'une v.a autour de sa moyenne

Il est souvent préférable (calculs moins lourds) de se ramener à des variables centrés (ie de moyenne nulle), en retranchant E(X) à X : on définit ainsi les moments centrés d'ordre p, le plus important d'entre eux étant la variance.

Définition 106. *Soit X une va réelle de carré intégrable. On appelle variance de X la quantité :* $Var(X) := E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$

La racine carré de Var(X) est appelée l'écart type.

On peut de même définir les moments centrés d'ordre p

Vocabulaire : Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée. Une v.a de variance égale à 1 est dite réduite.

On a : Var(X+α)=Var(X) et Var(α X)= α^2 Var(X)

En fait, l'existence de moments permet de quantifier la concentration de la loi autour de sa valeur moyenne. Cela découle de l'inégalité des inégalités qui suivent :

Proposition I .10. *Inégalité de Markov*

Soit $a > 0$ et X va positive, alors

$$P(X \geq a) \leq a^{-p} E(|X|^p)$$

Démonstration. Remarques $a^p.1_{X \geq a} \leq |X|^p$ et passer à l'espérance. □

Proposition I .11. *Inégalité Bienaymé-Tchebichev Soit X va réelle de carré intégrable, et $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors on a les deux inégalités suivantes :*

(i) $P(|X| \geq a) \leq a^{-2} E(|X^2|)$

(ii) $P(|X - E(X| \geq a) \leq a^{-2} Var(X)$

Démonstration. (i) $P(|X| \geq a) = P(X^2 \leq a) \leq a^{-2} E(X^2)$ (inégalité de Markov)

(ii) Application de (i) à X-E(X) □

Proposition I .12. *Inégalité Jensen Soit ϕ convexe de $I \in \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit X unve va L^1 à valeurs dans I. Alors,*

$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$$

Démonstration. Posons m :=E(X). On a $m \in I$. ϕ étant convexe, il existe f fonction affine partout inférieure à ϕ telle que $f(m) = \phi(m)$. Notons :

$$f(x) = \phi(m) + \alpha(x - m)$$

. On a $E(f(X)) = \phi(m) + \alpha E(X - m) = \phi(m)$.

On conclut en passant à l'espérance l'inégalité $f(X) \leq \phi(X)$. □

Proposition I .13. *Soit f fonction réelle, croissante, strictement positive, et X v.a telle que f(X) soit intégrable. Alors pour tou ϵ réel ;*

$$P(X > \epsilon) \leq \frac{Ef(X)}{f(\epsilon)}$$

En particulier, si X v.a réelle telle que pour un certain $a > 0$ on ait exp(aX) intégrable, alors :

$$P(X > \epsilon) \leq \exp(-a\epsilon) E(\exp(aX))$$

II Indépendance de v.a et conditionnement

II .1 Définition et caractérisation

On définit tout d'abord la covariance d'un couple de v.a (de carré intégrable) comme : $cov(X_1, X_2) = E(XY) - E(X)E(Y)$ On a : $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2cov(X, Y)$

Proposition II .1. *Deux variables X_1 et X_2 sont indépendantes ssi pour toute fonction f réelle bornée (mesurable), $E(f_1(X_1)f_2(X_2)) = E(f_1(X_1))E(f_2(X_2))$.*

En particulier, si X_1 et X_2 admette une moyenne, on a $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$

Si elles admettent un moment d'ordre 2, alors $cov(X_1, X_2) = 0$ et $\sigma^2_{X_1+X_2} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2}$.

Proposition II .2. *Critère d'indépendance*

Pour que X_1 et X_2 soient indépendantes, il faut et suffit que

$$\phi_(X_1, X_2)(t_1, t_2) = \phi_{X_1}(t_1)\phi_{X_2}(t_2) \forall t_1, t_2$$

Proposition II .3. *Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes. Alors*

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$$

II .2 Espérance conditionnelle

Rappel : proba conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

Si X et Y prennent des valeurs dans un ensemble dénombrable, si cela a un sens, on peut définir : $f(x_j) = E(Y|X = x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(Y = y_k|X = x_j)$

On définit alors $E(Y|X) = f(x_j)$ (si $P(X = x_j) > 0$; on peut poser une valeur arbitraire sinon).

Théorème II .4. *Soit (Ω, A, P) un espace de proba et $X \in L^2(\Omega, A, P)$ et F une sous tribu de A. alors il existe une unique v.a $Y \in L^2(\Omega, F, P)$ telle que :*

$$\forall Z \in L^2(\Omega, F, P), \;\; E(XZ) = E(YZ) \iff \forall B \in F, \;\; E(X1_B) = E(Y1_B)$$

On pose alors $Y = E(X|F)$

Remarque : Y est le projeté orthogonal de X sur $L^2(\Omega, F, P)$ (qui est un Hilbert !). Par densité de L^2 dans L^1 (ou Random-Nikodym), on étend le théorème à L^1.

Proposition II .5. *(i) $E(\alpha X + \beta Z|F) = \alpha E(X|F) + \beta E(Z|F)$*
(ii) X mesurable ssi $E(X|F)$=X p.s
(iii) X indépendant de F ssi $E(X|F) = E(X)$
(iv) Si $G \in F \in A$ $E(E(X|F)|G) = E(X|G)$
(v) Si $X \in L^2(\Omega, A, P)$ et $Z \in L^2(\Omega, F, P)$ $E(XZ|F) = ZE(X|F)$

II .3 Evolution de populations : processus de Galton Watson

Définition 107. *Fonction génératrice des moments - Transformée de Laplace*

$$L^X(s) = E(\exp(< s, X >))$$

lorsque cette expression a un sens.

La transformée de Laplace, si elle est définie sur un voisinage de 0, caractérise la loi.

Proposition II .6. *Soit X un v.a telle que e^{tX} soit intégrable pour t dans un ouvert contenant 0. Alors L^X est analytique sur un voisinage de 0, et :*

$$L^X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

En particulier,

$$(L^x)^{(n)}(0) = E(X^n)$$

Démonstration. Convergence dominée sur $]-\epsilon, \epsilon[$ voisinage de 0. □

Application : Processus de Galton Watson

Proposition II .7. *Soient $p_0, p_1 \dots$ les probabilités qu'un homme ait $0, 1 \dots$ fils, et supposons qu'il en soit de même pour tout ses descendants (mâles). Quelle est la probabilité pour que la descendance mâle soit éteinte après r générations, et plus généralement, quelle est la probabilité pour que le nombre de descendants pour une certaine génération soit égal à un nombre donné ?*

III Comportement asymptotique

III .1 Critère et vitesse de convergence

Théorème III .1. *Les deux conditions sont équivalentes : (i) $E(|X|) < \infty$*
(ii) $\lim_{n\to\infty} S_n/n$ p.s

(Application : Polynômes de Bernstein)

Théorème III .2. *(TCL) Soit X de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(E(X) - \bar{X_n}) \to_{loi} N(0, 1)$$

En pratique : $P(|E(X) - X_n| \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = P(|Z| \leq 1.96) = 0,95$

On dit que l'intervalle aléatoire $[\bar{X_n} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X_n} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance asymptotique 0,95.

Petit problème : dans la vie réelle, si on ignore E(X), on ignore aussi σ....

On s'en sort via Slutsky et la proposition suivante, qui donne un estimateur de la variance.

Proposition III .3. *La quantité $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X_n)$ est un estimateur sans biais (ie vérifie $E(S_n^2) = \sigma^2$) consistant de σ^2 (converge en proba)*

Lemme III .4. *Si une suite de va $(X_n)_n$ converge en loi vers X et une suite de va $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers un réel a, alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X,a).*

Donc l'intervalle de confiance devient $[\bar{X_n} - 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X_n} + 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}]$
où toutes les quantités intervenantes sont soient connues, soient calculables à partir des échantillons de données.

Remarque : TCL = vitesse de convergence dans la LGN. Question suivante : quelle est la vitesse de convergence dans TCL ? Réponse : Berry-Essen

Théorème III .5. *Berry-Essen Soient $(X_j)_j$ v.a réelles i.i.d vérifiant $E(|X|^3) < \infty$ et $\sigma^2 = \sigma^2_{X_j} > 0$. Soit $G_n(x) = P(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x)$, où m=E($X_j$) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit enfin Φ la fonction de répartition de la loi N(0,1). On a alors :*

$$sup|G_n(x) - \Phi(x)| \leq c\frac{E(|X_1|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Pour une constante c, dont la meilleure valeur connue est autour de 0,8.

III .2 Application : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Définition 108. *On appelle marche aléatoire la suite (S_n) définie par :*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$$

Où les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, avec d $\in \mathbb{N}^*$
On note e=($e_1, \ldots e_d$) la base canonique de $\mathbb{R}^*$. Dans ce cas, la marche aléatoire modélise mouvement sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, à valeurs dans l'ensemble fini $\{e_1, \ldots e_d, -e_1, \cdots - e_d\}$, de loi uniforme :

$$\forall i \in \{1\ldots d\}\ P(X_1 = e_i) = P(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$$

La marche aléatoire (S_n) est alors définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_n &= \sum_{k=0}^n X_n \\ S_0 &= 0 \end{cases} \tag{260.1}$$

La marche aléatoire s'interprète facilement en dimension 2 comme un marcheur ivre cherchant son chemin ; en dimension 3, remplacer l'ivrogne par un poisson ou un oiseau.

Le but de ce développement est d'étudier le comportement asymptotique de la marche aléatoire. La loi des grands nombres ne nous apprend pas grand chose, car l'espérance commune des X_i est nulle.

Théorème III .6. *Théorème de Polya*

(i) Si d ≤ 2, la marche aléatoire est récurrente : tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement une infinité de fois par la marche.

(ii) Si d $\geq$3, la marche aléatoire est transiente : presque sûrement, tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement un nombre fini (qui peut être nul) de fois par la marche.

III .3 Monte Carlo et problème de réduction de la variance

On se donne une intégrale sur un compact de $\mathbb{R}^d$. On peut, via translations et dilatations, se ramener à [0,1], et on considère : $I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$.

On pose X=$f(U_1, \ldots U_n)$ des v.a i.i.d uniformes [0,1]. Alors :

$$\int_{[0,1]^d} f(x)dx = E(X)$$

On utilise alors les résultats précédents (LGN et TCL) pour obtenir un intervalle de confiance de l'intégrale, lorsqu'on la simule à partir de n variables iid

$$P(I \in [X_n * -1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}, X_n * +1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}]) = 0,95$$

Enfin, on remarque que l'on peut estimer des intégrales du type

$$\int_{[0,1]^d} f(x)g(x)dx = E(g(X))$$

avec X v.a de densité f.

Pour améliorer l'estimation, il faut diminuer l'intervalle de confiance. La convergence en $\sqrt{n}$ est imposée, en revanche on peut jouer sur la variance. En pratique, on cherche une v.a Y de même espérance que X mais de variance inférieure (méthode de réduction de la variance).

Echantillonage pondéré (importance sampling) On se veut calculer l'intégrale de f sur un segment/compact. On calcule f sur un nombre fini de v.a aléatoire identiquement distribuées, et on moyenne. Sauf que cela ne sert à rien d'aller calculer l'intégrale sur les domaines où la fonction f prend de très faibles valeurs. Par exemple, pour une gaussienne, toutes les v.a iid qui dépassent 2-3 fois l'écart type vont apporter une contribution nulle à la somme. Il vaut donc mieux se concentrer sur les domaines où la fonction f prend de fortes valeurs ; c'est le principe de l'échantillonnage pondéré : les v.a ne sont plus prises uniformément (ie au hasard complet), mais sont prises selon une loi judicieusement choisie à l'avance.

$\int_{[0,1]^d}^{f}(x)g(x)dx = \int_{[0,1]^d} \frac{f(x)g(x)}{h(x)}h(x)dx = E(\frac{f(Y)g(Y)}{h(Y)}) = E(Z)$

avec Y va de densité h. Pour que cela soit intéressant, il convient de choisir h telle que $Var(Z) << Var(g(X))$.

On a : $Var(Z) = \int \frac{g^2(x)f^2(x)}{h(x)}dx - (E(g(X))^2)^2$ Donc le meilleur choix pour h est h(x)=g(x)f(x)/E(g(X)), excepté que l'on ne connait pas à priori E(g(X)).

IV Vrac

Choses que l'on peut rajouter :
Espérance conditionnelle (dvt possible)
Quelques problèmes où l'espérance joue un rôle : ruine du joueur, collectionneur, tanks allemands.

IV .1 Calculs de moments/variance pour des lois usuelles

Exemples :
(i) Var(X) = 0, alors X est p.s égale à son espérance.
(ii) Si X Bernoulli B(n,p), sa variance est np(1-p).
(iii) Var(X+α)=Var(X) et Var(α X)= α^2 Var(X) (ne surtout pas oublier le carré)
(iv) Si X N(m,σ), alors $Var(X) = \sigma^2$ et E(X)=m Pour le calcul, se ramener à N(0,1) en vertu de (iii) !
Exercice : Calculer les espérances et variances des lois usuelles suivantes.

Nom	Définition	Espérance	Variance
Unif(1,n)	P(X=j)=1/n	$\frac{n+1}{2}$	
Poisson P(λ)	$P(X=j) = \frac{\lambda^j}{j!}\exp(-\lambda)$	λ	
Bernoulli p		p	
Binomiale B(n,p)	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^k$	np	
Géométrique	$P(X=k) = (1-p)^k p$, $k \in \mathbb{N}$	$\frac{1-p}{p}$	
Pareto	$P(X=j) = \frac{c}{j^{\alpha+1}}$	$\zeta(\alpha)/\zeta(\alpha+1)$	
Unif(a,b)		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle E(λ)	$f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)1_{x>0}$	λ^{-1}	
Loi Gamma α	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1e^{-x}}}{\Gamma(\alpha)}$	α	α
Normale N(m,σ)	$g_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}$	m	σ
Log-normale	f(x)=$\frac{1}{x}g_{\mu,\sigma^2}(\log x)$	$\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$	$\exp(2\mu+\sigma^2)(e^{\sigma^2}-1)$
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\beta\pi}\frac{1}{1+(x-\alpha)^2/\beta^2}$	existe pas	∞

Remarque : Pour binomiale, dire que c'est une somme de n Bernoulli.

LEÇON 261

FONCTION CARACTÉRISTIQUE ET TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence :
Foata Franchi Fuchs, Calcul des probabilités

I Fonction génératrice des moments et Transformée de Laplace

I .1 Définition

Définition 109. *On appelle fonction génératrice des moments la fonction $g_X(u) = E(\exp(uX))$, définie lorsque cela a un sens.*

Définition 110. *Soit X une lois telle que g_X soit définie sur un voisinage ouvert de l'origine. Alors g_X est appelée fonction génératrice des moments de la loi de X.*

Proposition I .1. *(1) g_X est toujours définie pour u=0 et $g_X(0) = 1$.*
(2) Si X est bornée, alors g_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$
(3) Si X est à valeurs positives, alors g_X continue bornée sur $]-\infty, 0]$. On fait alors souvent le changement de variable u=-v pour définir la transformée de Laplace de la loi de X :

$$L_X(v) = g_x(-v) = \mathbb{E}[\exp(-vX)]$$

Exemple :
Si X=loi de Cauchy, alors g_X n'est définie qu'en 0.

Proposition I .2. *(1) $g_{aX+b}(u) = \exp(bu)g_X(au)$*
(2) $g_X(iu)$ est aussi une fonction génératrice des moments
(3) Si la loi est symétrique, alors g_X est une fonction paire
(4) g_X est convexe (car combinaison convexe de fct exp)

Théorème I .3. *La fonction génératrice des moments d'une v.a détermine la loi de cette variable.*

Démonstration. Si va à valeur dans $\mathbb{N}$, c'est facile en considérant la fonction génératrice $G(s) = E(s^X)$, et on peut montrer que G détermine la loi de X.
Cas général plus dur. □

Théorème I .4. *Soit (X,Y) un couple de v.a indépendantes, dont chacune admet une fonction génératrice des moments. Alors : $g_{X+Y} = g_X g_Y$.*
Cette propriété n'est pas caractéristique de l'indépendance.

Démonstration. Se fait de façon élémentaire en revenant à la définition et en utilisant l'indépendance. □

I .2 Justification du nom de cette fonction

Théorème I .5. *Soit X une va admettant une fonction génératrice des moments g, définie sur l'ouvert $]u_1, u_2[$, où $u_1 < 0$, $u_2 > 0$. Alors :*
(1) $\forall k \geq 1 E(|X|^k) \leq \infty$
(2) $\forall t \in]-s, s[0 < s < u_0 = min(u_1, u_2)$ on a $g(t) = 1 + E(X)t + E(X^2)\frac{t^2}{2} + \cdots + E(X^n)\frac{t^n}{n!} + \ldots$
(3) $\forall k \geq 1$ on a $g^{(k)}(0) = E(X^k)$

Réciproque fausse. Soit Y une N(0,1), et X=exp(Y) (X suit une log-normale(0,1)).

a) X admet des moments à tout ordre : $E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} e^{ny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = e^{n^2/2} < \infty$

b) Mais $g(u) = E(e^{uX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ue^y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$ convergente si $u \in]-\infty, 0]$ qui n'est pas un voisinage ouvert de 0.

Donc X admet des moments à tout ordre, mais pas de fonction génératrice des moments. Conséquence : il existe d'autres loi qui admettent même moments à tout ordre que la loi normale (cf leçon 260 sur les moments d'une va).

II Fonction caractéristique

II .1 Définitions

Définition 111. *Soit X une va réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction de la variable réel t définie par*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$$

Proposition II .1. *(a) Si X va discrète $\sum_k p_k 1_{x_k}$, alors $\phi(t) = \sum_k p_k \exp(itx_k)$*
(b) Si X va de densité f, alors $\phi(t) = \int_{mathbbR} \exp(itx) f(x) dx$

Théorème II .2. *Propriétés élémentaires*
1) ϕ est définie continue pour tout réel t
2) ϕ est bornée : $|\phi(t)| \leq \phi(0) = 1$
3) $\phi(-t) = \phi^*(t)$
4) a,b réels $\phi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$
5) Si la loi de X est symétrique, alors ϕ_X est une fonction réelle, donc paire.
6) Toute combinaison convexe de fonctions caractéristiques est une fonction caractéristiques.

Fonctions caractéristiques des lois usuelles On peut pas vraiment remplacer u (dans la fonction des moments g) par it, pck g n'est pas forcément définie ou a des puissances non entières (et donc plusieurs détermination dans le plan complexe...). Donc on se tape le calcul à chaque fois.

II .2 Indépendance

Théorème II .3. *Soit (X,Y) un couple de va indépendantes. Alors*

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$$

Ce n'est pas caractéristique de l'indépendance.

Démonstration. Calcul direct.

Contre exemple : X Cauchy(0,1), fonction caract $\phi_X(t) = \exp(-|t|)$. On considère le couple (X,X), de fonction caractéristique :

$$\phi_{X+X}(t) = \phi_{2X} = \exp(-2|t|) = (\exp(-|t|))^2 = \phi_X(t)\phi_X(t)$$

□

Application : Théorème de Polya (Développement)

II .3 Lien avec les moments

Théorème II .4. *Soit X va de fonction caractéristique ϕ_X. Si $E(|X|) < \infty$ alors ϕ_X est continûment dérivable et $\phi'(0) = iE(X)$*

Démonstration. Dans le cas à X admet une densité, on écrit ϕ puis dérivation sous signe somme. □

Théorème II .5. *Soit X une va de fonction caractéristique ϕ_X. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $E(|X|^n) < \infty$. Alors :*
(1) ϕ_X est continûment dérivable jusqu'à l'ordre n inclus.
(2) Pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, on a $(\phi_X)^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$
(3) ϕ_X peut être représenté par la formule de Taylor :

$$\phi_X = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(|t|^n)$$

II .4 De la fonction caractéristique à la loi

[Candelpergher]

Théorème II .6. *Théorème d'inversion*
La fonction caractéristique d'une loi de probabilité détermine cette loi.
Autrement dit, deux va ont même loi ssi elles ont même fonction caractéristique.

Théorème II .7. *Formule d'inversion*
Si X va telle que ϕ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors X possède une densité continue donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-itx)\phi_X(t)dt$$

Rq : Une va à densité n'a pas forcément une fonction caractéristique intégrable sur $\mathbb{R}$. Prendre $f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,\infty[} \exp(-x)$, on a $\phi_X(t) = \frac{1+it}{t^2+1}$.

III Convergence en loi

III .1 Définition et caractérisation

Définition 112. *On dit que (X_n) converge en loi vers X (on dit aussi que les lois P^{X_n} convergent étroitement vers la loi P^X) si*

$$\lim_n \int \phi(X_n)dP = \int \phi(X)dP \forall \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{continue bornée}$$

Exemple et remarques : [Candelpergher]
La loi de proba $(\delta_{1/n})$ converge vers (δ_0), car pour toute fonction continue bornée on a bien ....
En revanche, l'égalité des intégrales n'est pas vrai si la fonction n'est que mesurable : prendre $h = 1_{]0,\infty]}$ dans l'exemple précédent.
On a de plus $\delta_{1/n}(]0,1]) = 1 \not\to 0 = \delta_0(]0,1])$: la convergence en proba n'implique pas que $P_n(B)$ converge vers P(B) pour tous les boréliens B !
Enfin, une suite de va discrète peut converger en loi vers une va à densité ! Prendre : X_n va discrète prenant les valeurs k/n $(0 \leq k \leq n)$ avec équiprobabilité. Donc $P^{X_n} = \sum_{k=1}^n 1/n\delta_{k/n}$. Donc (somme de Riemann) X_n converge vers la mesure de Lebesgue de [0,1].
Réciproquement, une suite de va discrète peut converger en loi vers une va à densité : X_n donné par la densité $n\exp(-nx)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ cv en loi (retour à la définition + convergence dominée) vers la loi discrète de proba δ_0.

Proposition III .1. *Soit g continue, et X_n converge en loi vers X, alors $g(X_n)$ converge en loi vers g(X).*

III .2 Convergence des fonctions de répartition et transformée de Laplace

Exemple : $X_n = 1/n$ suite va constante, converge presque surement vers 0, mais on a $F^{X_n}(0) = 0 \not\to F^X(0) = 1$. On a convergence que pour les x non nuls, ie là ou F^X est continue !

Proposition III .2. *Caractérisation de la convergence en loi (pour v.a à valeur dans $\mathbb{R}$, pas $\mathbb{R}^d$! !)*
(X_n) converge en loi vers X $\iff$ $\lim_n F^{X_n}(t) = F^X(t)$ en tout point t de continuité de F^X.
De plus, $P(a \leq X_n \leq b) \to_n P(a \leq X \leq b)$ en tout point a et b où F est continue.

Le deuxième point s'étend à $\mathbb{R}^d$ en tout point tel que P(X=a)=0=P(X=b) (ie points non chargés par la loi P^X de X).
Utile pour application TCL

III .3 Caractérisation convergence en loi par fonction de répartition et Théorème centrale limite

Théorème III .3. *Théorème de Lévy*
Si $\phi^{X_n} \to_n \phi^X$ (simplement) alors X_n converge en loi vers X
Si $\phi^{X_n} \to_n \psi$ (simplement) et ψ continue en 0, alors ψ est la fonction de caractéristique d'une v.a Y et X_n converge en loi vers Y.

Théorème III .4. *(TCL) Soit X de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}(E(X) - \bar{X_n}) \to_{loi} N(0,1)$$

LEÇON 262

MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence :

Dans toute la leçon, on considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées (qui sont de plus dans $\mathbb{R}^d$).

I Convergence en presque sûre et en probabilité

I .1 Définition

Définition 113. *Soit (X_n) une suite de v.a.*

— *(X_n) converge presque sûrement vers une v.a X si il existe un ensemble de probabilité 1 sur lequel la suite (X_n) converge simplement vers X.*

— *(X_n) converge en probabilité vers une v.a X si pour tout $\epsilon > 0$, la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ converge vers 0.*

Proposition I .1. *Unicité de la limite pour ces deux modes de convergence.*

Démonstration. OK pour convergence p.s.

L'autre pas évident : Soit X et X' deux limites en proba de (X_n).

$$(|X - X'| > \epsilon) \subset (|X - X_n| > \epsilon/2) \bigcup (|X_n - X'| > \epsilon/2)$$

Donc

$$\mathbb{P}(|X - X'| > \epsilon) \leq P(|X - X_n| > \epsilon/2) + \mathbb{P}(|X_n - X'| > \epsilon/2)$$

Passage à la limite : $\mathbb{P}(|X - X'| > \epsilon) = 0$ Enfin : $(X \neq X') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}(|X - X'| > 1/n)$ pour conclure. □

Proposition I .2. *Vive les quantificateurs ! La convergence en proba s'exprime :*

$$\forall \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists N(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N} tq n \geq N(\epsilon, \delta) \Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \delta$$

Ce qui équivaut aussi à :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} tq n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \epsilon$$

Conditions pour la convergence presque sûre

Théorème I .3. *S'il existe une série à terme positifs de terme général ϵ_n convergente telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > \epsilon_n) < +\infty$$

Alors la suite (X_n) converge presque sûrement.

Démonstration. Borel Cantelli à $A_n = (|X_{n+1} - X_n| > \epsilon_n)$ Donc $C = \liminf_n (|X_{n+1} - X_n| \leq \epsilon_n)$ est de proba 1 donc $\forall w \in C |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)|$ converge, donc (X_n) cv ps. □

Théorème I .4. *Si X est une va telle que pour tout $\epsilon > 0$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < +\infty$$

Alors la suite (X_n) converge presque sûrement vers X.

Démonstration. Borel Cantelli pour $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: $\mathbb{P}(\limsup(|X_n - X| > \epsilon)) = 0$.

Donc, comme $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable : $\mathbb{P}(\bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \limsup_n (|X_n - X) > \epsilon) = 0$

Donc $C = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \liminf(|X_n - X| \leq \epsilon)$ est de proba 1, et c'est l'ensemble des ω pour lesquels la suite $(X_n(\omega)$ converge vers $(X(\omega)$. □

Rq : ce dernier th est une condition nécessaire non suffisante de cv ps. Pour une réciproque partielle, rajouter l'indépendance des X_n.

Contre exemple : $([0,1], \mathcal{B}_[0,1]), \lambda)$ où λ mesure de Lebesgue sur [0,1], considérons $X_n = \mathbf{1}_[0, 1/n[$, on a $\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 1/n$ donc la série diverge mais X_n converge ps vers 0.

Relation entre les deux modes de convergence

Théorème I .5. *(a) Si (X_n) converge ps, alors elle converge en proba, et les deux limites sont égales.*

(b) Si (X_n) converge en proba vers X, alors il existe une suite extraite qui converge ps vers X

(c) Pour que (X_n) converge en proba vers X, il faut et suffit qu'elle soit de Cauchy en proba, cad $\forall \epsilon > 0$, la suite double $P(|X_n - X_m| > \epsilon)$ converge vers 0.

Démonstration. En fait pas trivial.... □

Proposition I .6. *Soit f continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k$. Si (X_n) converge en proba vers X, alors $f(X_n)$ converge en proba vers $f(X)$.*

I .2 Lois des grands nombre

[Barbe Ledoux]

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_n$

Théorème I .7. *Loi faible des grands nombres*

Si $E(|X|) < \infty$ alors S_n/n converge en proba vers E(|X|)

Démonstration. Voir Barbe Ledoux

On centre les X_i, $X \in L^1$ donc la fonction caractéristique ϕ^X est dérivable et $(\phi^X)'(0) = iE(X) = 0$. Taylor : $\phi^X(t) = 1 + o(t)$ donc $\phi^{S_n/n}(t) = (|phi^X(t/n))^n = 1 + o(1)$ et 1 est la fonction caractéristique de δ_0. Donc S_n/n converge en loi vers la fonction constante 0, donc en probabilité vers 0.

Rq : on peut aussi le montrer via Bienaymé-Tchebichev, et ça ne fait pas apparaitre la convergence en loi (qui arrive plus loin dans la leçon...). □

Théorème I .8. *Loi forte des grands nombres*

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

— $E(|X|) < \infty$

— $\lim_n S_n/n = E(X)$ *ps*

Démonstration. Dans le cas L^4, se ramener à X_n centré, regarder $E(S_n^4) = nE(X^4) + 3n(n-1)(E(X^2))^2$ puis Markov donne : $P(|S_n| > \delta n) \leq \frac{E(S_n^4)}{\delta^4 n^4}$ puis conclure aver Borel-Cantelli.

Ensuite approcher uniformément une variable L^1 par une variable L^4. □

Application : Calcul d'intégrales via Monte Carlo On se donne une intégrale sur un compact de $\mathbb{R}^d$. On peut, via translations et dilatations, se ramener à [0,1], et on considère : $I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$.

On pose X=$f(U_1, \dots U_n)$ des v.a i.i.d uniformes [0,1]. Alors (LGN) :

$$\int_{[0,1]^d} f(x)dx = E(X)$$

II Convergence en norme p

II .1 Notions d'équi-intégrabilité

Définition 114. *$(X_i)_{i\in I}$ (I ensemble quelconque) est équi-intégrable si*

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{|X_i|>a}|X_i|dP=0$$

Proposition II .1. *Si (X_i) est uniformément bornée par une va positive intégrable X, c'est à dire si :*

$$\forall i\in I|X_i|\leq Xp.s$$

alors (X_i) est équi-intégrable. En particulier toute famille finie de variables intégrable est équi-intégrable.

Démonstration. Premier point : intégrer puis prendre le sup. Deuxième point : prendre $X = max(|X_i|)$ comme majorant. □

Définition 115. *$(X_i)_{i\in I}$ est dite équi-continue si :*

$$\forall\epsilon>0\exists\eta>0/P(A)\leq\eta\Rightarrow\sup_i\int_A|X_i|dP\leq\epsilon$$

Proposition II .2. *(X_i) équiintégrable $\iff$ (X_i) équicontinue bornée dans L^1, cad $\sup_i\int_A|X_i|dP\leq\epsilon\leq\infty$.*

II .2 Convergence en norme p

On rappelle que X est dans L^p, p>0 si $E(|X|^p)$ est fini. L'espace L^p est muni de la norme : $||X||_p=(E(|X|^p))^{1/p}$, qui en fait un espace complet.

Définition 116. *(X_n) admettant un moment d'ordre p, converge dans L^p vers X si*

$$\lim\mathbb{E}[|X_n-X|^p]=0$$

Théorème II .3. *Théorème de Vitali*
(i) (X_n) converge dans L^p
(ii) (X_n) de Cauchy dans L^p
(iii) (X_n) équi-intégrable et converge en proba vers X.

II .3 Application : martingales

III Convergence en loi

III .1 Définitions et premiers théorèmes

[Barbe-Ledoux]

Convergence la plus faible, mais peut-être la plus utilisée, surtout en stats.

Rappel : Deux va X et Y ont même loi ssi elles ont même fonctions de répartitions ssi leur fonction caractéristique sont égale ssi pour toute fct ϕ continue bornée on a $\int\phi(X)dP=\int\phi(Y)dP$.

Définition 117. *On dit que (X_n) converge en loi vers X (on dit aussi que les lois P^{X_n} convergent étroitement vers la loi P^X) si*

$$\lim_n\int\phi(X_n)dP=\int\phi(X)dP\quad\forall\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad\text{continue bornée}$$

Exemple et remarques : [Candelpergher]

La loi de proba $(\delta_{1/n})$ converge vers (δ_0), car pour toute fonction continue bornée on a bien ....

En revanche, l'égalité des intégrales n'est pas vrai si la fonction n'est que mesurable : prendre $h=1_{]0,\infty]}$ dans l'exemple précédent.

On a de plus $\delta_{1/n}(]0,1])=1\not\to 0=\delta_0(]0,1])$: la convergence en proba n'implique pas que $P_n(B)$ converge vers P(B) pour tous les boréliens B !

Enfin, une suite de va discrète peut converger en loi vers une va à densité ! Prendre : X_n va discrète prenant les valeurs k/n $(0\leq k\leq n)$ avec équiprobabilité. Donc $P^{X_n}=\sum_{k=1}^n 1/n\delta_{k/n}$. Donc (somme de Riemann) X_n converge vers la mesure de Lebesgue de [0,1].

Réciproquement, une suite de va discrète peut converger en loi vers une va à densité : X_n donné par la densité $n\exp(-nx)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ cv en loi (retour à la définition + convergence dominée) vers la loi discrète de proba δ_0.

Proposition III .1. *Soit g continue, et X_n converge en loi vers X, alors $g(X_n)$ converge en loi vers g(X).*

III .2 Convergence des fonctions de répartition et transformée de Laplace

Exemple : $X_n = 1/n$ suite va constante, converge presque surement vers 0, mais on a $F^{X_n}(0) = 0 \not\to F^X(0) = 1$. On a convergence que pour les x non nuls, ie là ou F^X est continue !

Proposition III .2. *Caractérisation de la convergence en loi (pour v.a à valeur dans $\mathbb{R}$, pas $\mathbb{R}^d$! !)*
(X_n) converge en loi vers X $\iff \lim_n F^{X_n}(t) = F^X(t)$ en tout point t de continuité de F^X.
De plus, $P(a \leq X_n \leq b) \to_n P(a \leq X \leq b)$ en tout point a et b où F est continue.

Le deuxième point s'étend à $\mathbb{R}^d$ en tout point tel que P(X=a)=0=P(X=b) (ie points non chargés par la loi P^X de X).
Utile pour application TCL

Proposition III .3. *Lien entre le différents modes de convergence et contre exemples*
(i) Cv ps implique cv en loi (retour définition + th cv dominée)
(ii) cv en proba implique cv en loi : regarder fct répartitions
(iii) Réciproque de (ii) fausse, considérer $X_n = (-1)^n X$ où X est une N(0,1).
(iv) Réciproque partielle : si X_n converge en loi vers une constante c, alors la convergence vers c est aussi en proba. Voir Lemme de Slutsky

Proposition III .4. *Caractérisation convergence en loi pour va discrète à valeur dans $\mathbb{N}$*
X_n cv en loi vers X $\iff \lim_n P\{X_n = k\} = P\{X = k\}$

Démonstration. Via fonction de répartition. □

Application : TCL Poissonien

Théorème III .5. *Théorème central limite Poissonien*
Soit S_n une va $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_n np_n = \lambda$, alors S_n converge en loi vers une v.a de poisson de paramètre λ.

Démonstration. Montrer que $\lim_n P(S_n = k) = \exp(-\lambda)\lambda^k/k!$ pour tout k entier naturel □

Théorème III .6. *Théorème de Lévy*
Si $\phi^{X_n} \to_n \phi^X$ (simplement) alors X_n converge en loi vers X
Si $\phi^{X_n} \to_n \psi$ (simplement) et ψ continue en 0, alors ψ est la fonction de caractéristique d'une v.a Y et X_n converge en loi vers Y.

Lemme III .7. *Lemme de Slutsky*
Si X_n converge en proba vers X et Y_n converge en loi vers une constante c, alors le couple (X_n, Y_n) converge en proba vers (X, Y).

III .3 TCL et intervalles de confiance

Théorème III .8. *(TCL) Soit X de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(E(X) - \bar{X_n}) \to_{loi} N(0,1)$$

En pratique : $P(|E(X) - X_n| \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = P(|Z| \leq 1.96) = 0,95$
On dit que l'intervalle aléatoire $[\bar{X_n} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X_n} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance asymptotique 0,95.
Petit problème : dans la vie réelle, si on ignore E(X), on ignore aussi σ....
On s'en sort via Slutsky et la proposition suivante, qui donne un estimateur de la variance.

Proposition III .9. *La quantité $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X_n)$ est un estimateur sans biais (ie vérifie $E(S_n^2) = \sigma^2$) consistant de σ^2 (converge en proba)*

Lemme III .10. *Si une suite de va $(X_n)_n$ converge en loi vers X et une suite de va $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers un réel a, alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X,a).*

Donc l'intervalle de confiance devient $[\bar{X_n} - 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X_n} + 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}]$
où toutes les quantités intervenantes sont soient connues, soient calculables à partir des échantillons de données.

Intervalle de confiance pour Monte Carlo On a vu en première partie qu'en prenant X=$f(U_1, \dots U_n)$ des v.a i.i.d uniformes [0,1], on avait :

$$\int_{[0,1]^d} f(x)dx = E(X)$$

On utilise alors les résultats précédents (TCL) pour obtenir un intervalle de confiance de l'intégrale, lorsqu'on la simule à partir de n variables iid

$$P(I \in [X_n^* - 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}, X_n^* + 1,96\frac{S_n}{\sqrt{n}}]) = 0,95$$

Enfin, on remarque que l'on peut estimer des intégrales du type

$$\int_{[0,1]^d} f(x)g(x)dx = E(g(X))$$

avec X v.a de densité f.

Pour améliorer l'estimation, il faut diminuer l'intervalle de confiance. La convergence en $\sqrt{n}$ est imposée, en revanche on peut jouer sur la variance. En pratique, on cherche une v.a Y de même espérance que X mais de variance inférieure (méthode de réduction de la variance).

III .4 Applications en statistique : test du Chi-2

Théorème III .11. *Théorème central limite en dimension d*

(X_n) suite de va iid, admettant des moments d'ordre 2. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n (X_j - E(X_j))$ converge en loi vers une gaussienne $N_d(0, X_{X_1})$, où C_{X_1} est la matrice de covariance des X_j.

Théorème III .12. *Théorème de Pearson*

Application : test du Chi2.

IV Autre idées

Proposition IV .1. *Caractérisation de la convergence en loi*

- *(X_n) converge en loi vers X*
- *$\lim_n F^{X_n}(t) = F^X(t)$ en tout point t de continuité de F^X*
- *$\lim_n \phi^{X_n} = \phi^X$ où ϕ est la transformée de Laplace*
- *il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ sur lequel sont définies les va X'_n et X' telles que X_n et X'_n ont même loi pour tout n, ainsi que X et X', et on ait $\lim_n X'_n = \lim X'$ p.s*

LEÇON 263

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I Variables aléatoire à densité

Définition 118. *X est dite à densité s'il existe $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ mesurable positive telle que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P(X \in A) = \int_A f_x(x)dx$. Dans ce cas, on remarque en particulier que P(X=x)=0.*

Proposition I .1. *Si d=1, la fonction de répartition s'écrit alors : $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(t)dt$. Si f_X est continue en t_0, alors $F'_X(t_0)f_x(t_0)$*

Si $X \in L^p$, alors $E(X^p) = \int_{\mathbb{R}^d} x^p f_X(x)dx$

La fonctionc caractéristique de X devient la transformée de Fourier de f_X : $\phi_X(t) = \int \exp(itx)f_X(x)dx$

Théorème I .2. *Formule d'inversion de Fourier*

Si ϕ_X est intégrable, alors $f_x(t) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(-itx)\phi_X(x)dx$

I .1 Opération sur les densié

Proposition I .3. *Densité d'une somme*

Soient X et Y va indépendantes à densité f_X et f_Y. La somme X+Y est de densité, donné par le produit de convolution entre $f_{X+Y}(t) = \int f(x-t)f_Y d\lambda$

Rapel : la convergence en loi de X_n vers X équivaut à la convergence simple des fonctions de répartition des F_{X_n} en tout point de continuité de F_X

Proposition I .4. *Limite simple de densité*

Si X_n et X sont des va de densité f_n et f, et que $\lim_n f_n = f$, alors X_n converge en loi vers X.

Proposition I .5. *Densités, espérance conditionnelles*

$P_{(X,Y)}(dx, dy) = p(x, y)dxdy$

$P_{X|Y=y} = \frac{p(x,y)}{\int p(z,y)dz}$

$E(Y|X = x) = \int y\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy$ *si* $f_X(x) \neq 0$.

II Vecteurs gaussiens

II .1 Définition

II .2 Projection de vecteurs gaussiens

III Lois uniforme et loi normale

III .1 Génération d'une va à partir de la loi uniforme

Conséquence : Si on sait simuler la loi uniforme U(0,1), alors on sait simuler n'importe quelle va

III .2 Convergence en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Théorème III .1. *Théorème Central Limite*

LEÇON 264

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Référence : Ouvrard 1 et 2
Barbe Ledoux
Candelpergher (pas sur en fait)

I Particularités des va discrètes

I .1 Variables aléatoires discrètes, loi de probabilité

Définition 119. *Une va X est dute discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable presque sûrement.*

L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé ensemble des réalisations de X, et noté $X(\Omega) = \{x_k, k \in K\}$ où $K = \{1, \dots, n\}$ ou $K) = \mathbb{N}$.

Proposition I .1. *La loi d'une va discrète X est entièrement caractérisée par les probabilités atomiques $p_k = P(X = x_k)$.*

On a de plus, $\forall A \subset \mathbb{R} P^X(A) = \sum_{k, x_k \in A} p_k = \sum_{k \in K} p_k \delta_{x_k}(A)$

Exemple : tirage pile ou face.

I .2 Lois discrètes usuelles

I .3 Espérance, variance, fonction de répartition

II Opérations et caractérisation de variables aléatoires discrètes

II .1 Indépendance

[Ouvrard 2]

Définition 120. *X_1 et X_2 va à valeur dans les espaces probabilisables $(E_i, \mathcal{E}_i)$ sont dites indépendantes si les tribus $X_1^{-1}(\mathcal{E}_1)$ et $X_2^{-1}(\mathcal{E}_2)$ sont indépendantes*

Proposition II .1. *X_1 et X_2 (va quelconques) sont indépendantes $\iff$ pour toute fonction mesurrée bornée f_1, f_2 on a $E(f_1(X_1) f_2(X_2)) = E(f_1(X_1)) E(F(X_2))$*

Proposition II .2. *Critère d'indépendance pour va discrète*

Pour que (X_1 et X_2 va discrètes soient indépendantes, il faut et suffit que

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega \forall x_2 \in X_2(\Omega P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2)$$

Exemple : [Barbe-Ledoux]

II .2 Somme

[Ouvrard 1]

II .3 Conditionnement

Règle de Bayes. Application : Questionnaire à choix multiple (Barbe Ledoux p.152)

II .4 Fonction génératrice

[Ouvrard 1]

Déf : fonction génératrice, Ex : pour une Bernoulli et une Poisson, Prop : propriétés de la fonction génératrice, Prop : fonction génératrice d'une somme de vad indépendantes, App : fonction génératrice d'une binomiale, App : Galton-Watson .

III Convergences et comportement asymptotiques

III .1 Caractérisation de la convergence en loi, TCL Poissonien

[Ouvrard 2, Barbe Ledoux]

Théorème III .1. *Convergence en loi des va discrètes*
Soient $(X_n)_n$ et X des va discrètes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On a :

$$X_n \to^{loi} X \iff \forall r \in \mathbb{Z} \lim_n P(X_n = r) = P(X = r)$$

Théorème III .2. *Théorème central limite Poissonien $[BarbeLedoux]$*
Soit S_n une va $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_n np_n = \lambda$, alors S_n converge en loi vers une v.a de poisson de paramètre λ.

Ex : loi du nombre de personnes nées le même jour (Ouvrard 2)

III .2 Lois des Grands Nombres

[Barbe Ledoux] On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$

Théorème III .3. *Loi faible des grands nombres*
Si $E(|X|) < \infty$ alors S_n/n converge en proba vers $E(|X|)$

Démonstration. Voir Barbe Ledoux
On centre les X_i, $X \in L^1$ donc la fonction caractéristique ϕ^X est dérivable et $(\phi^X)'(0) = iE(X) = 0$. Taylor : $\phi^X(t) = 1 + o(t)$ donc $\phi^{S_n/n}(t) = (|phi^X(t/n))^n = 1 + o(1)$ et 1 est la fonction caractéristique de δ_0. Donc S_n/n converge en loi vers la fonction constante 0, donc en probabilité vers 0.
Rq : on peut aussi le montrer via Bienaymé-Tchebichev, et ça ne fait pas apparaitre la convergence en loi. □

Théorème III .4. *Théorème de Bernoulli [Ouvrard 2] Soit (A_n) une suite d'événements indépendants de même probabilité p. La suite des va $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_n}$ converge en probabilité vers p.*

Démonstration. Les va $\mathbf{A}_{A_n}$ sont iid de loi une Bernoulli(p) ; elles admettent moment d'ordre 2 □

Théorème III .5. *Loi forte des grands nombres*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

— $E(|X|) < \infty$
— $\lim_n S_n/n = E(X)$ *ps*

Démonstration. Dans le cas L^4, se ramener à X_n centré, regarder $E(S_n^4) = nE(X^4) + 3n(n-1)(E(X^2))^2$ puis Markov donne : $P(|S_n| > \delta n) \leq \frac{E(S_n^4)}{\delta^4 n^4}$ puis conclure aver Borel-Cantelli.
Ensuite approcher uniformément une variable L^1 par une variable L^4. □

III .3 Un exemple de chaine de Markov : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Définition 121. *On appelle marche aléatoire la suite (S_n) définie par :*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Où les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, avec d $\in \mathbb{N}^*$
On note e=($e_1, \ldots e_d$) la base canonique de $\mathbb{R}^*$. Dans ce cas, la marche aléatoire modélise mouvement sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, à valeurs dans l'ensemble fini $\{e_1, \ldots e_d, -e_1, \cdots - e_d\}$, de loi uniforme :

$$\forall i \in \{1 \ldots d\} \; P(X_1 = e_i) = P(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$$

La marche aléatoire (S_n) est alors définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_n & = & \sum_{k=0}^{n} X_n \\ S_0 & = & 0 \end{cases} \tag{264.1}$$

La marche aléatoire s'interprète facilement en dimension 2 comme un marcheur ivre cherchant son chemin ; en dimension 3, remplacer l'ivrogne par un poisson ou un oiseau.

Le but est d'étudier le comportement asymptotique de la marche aléatoire. La loi des grands nombres ne nous apprend pas grand chose, car l'espérance commune des X_i est nulle, donc S_n/n tend vers 0.

Théorème III .6. *Théorème de Polya*

(i) Si d $\leq$ 2, la marche aléatoire est récurrente : tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement une infinité de fois par la marche.

(ii) Si d $\geq$3, la marche aléatoire est transiente : presque sûrement, tout site de $\mathbb{Z}^d$ est visité presque sûrement un nombre fini (qui peut être nul) de fois par la marche.