

## 1 Introduction

**Motivations** Le 1er janvier 2002, la monnaie unique a été adoptée par plusieurs pays de l'Union Européenne. Si la monnaie est la même, le côté face des pièces est néanmoins spécifique à chaque pays. On peut donc aisément savoir si une pièce est française, allemande, italienne, etc ...

Au départ (en 2002), chaque pays avait donc ses propres pièces. Le nombre de pièce d'un pays étant proportionnel à ses besoins (l'Allemagne possédait environ 32% des pièces, la France 15%, le Luxembourg 0,2%, etc). Peu à peu, les pièces ont franchi les frontières et se sont mélangées. On retrouve donc des pièces Allemandes en France, et vice versa.

On s'intéresse ici à la répartition des pièces des différents pays, par exemple le nombre de pièce allemandes présente en France à un instant donné.

Cette situation est unique dans l'histoire, et au delà de son intérêt divertissant, possède des conséquences économiques (combien de pièces y-a-t il en circulation dans un pays à un moment donné; la banque centrale doit elle retirer ou enlever des pièces pour garder un certain équilibre).

**Hypothèses** On fera des hypothèses simples :

1. une zone euro à seulement **2 pays** (par exemple France et Allemagne)
2. Chaque pays frappe un nombre fixe de pièces (**pas de création ni disparition** de monnaie). On note  $N_F$  le nombre de pièces françaises et  $N_A$  le nombre de pièces allemandes. Historiquement, on a :  $N_A > N_F$ .
3. L'évolution est modélisée par un processus discret. Pour chaque seconde qui s'écoule :
  - On tire aléatoirement une pièce dans le pays A.
  - On tire aléatoirement une pièce dans le pays B.
  - On échange les deux pièces.

## 2 Premières questions

On note  $t$  le temps en seconde depuis l'apparition de l'euro ( $t=0$  correspond au 1er janvier 2002 à minuit,  $t=1$  correspond à 1 seconde après).

**Répartition des pièces en France** On note  $X(t)$  le nombre de pièces françaises présentes en France

**Question 2.1.** *Montrer que  $X(0)=0$*

**Question 2.2.** *Montrer que le nombre total de pièces en circulation en France est constant (égal à  $N_F$ ) en vertu d'une des hypothèses de l'énoncé.*

**Question 2.3.** *Déduire des deux précédentes questions que le nombre de pièces allemandes présentes en France à l'instant  $t$  vaut  $N_A - X(t)$ .*

**Répartition des pièces en Allemagne**

**Question 2.4.** *Montrer qu'il y a  $N_B - X(t)$  pièces françaises présentes en Allemagne. Montrer de même qu'il y a  $X + N_B - N_A$  pièces allemandes en Allemagne.*

**Conclusion :** la connaissance de  $X(t)$  à tout instant  $t$  permet de connaître le nombre de pièces de chaque type dans chaque pays.

	France	Allemagne
Nombre total de pièces	$N_F$	$N_A$
Nombre d'euros français à $t$	$X(t)$	$N_A - X(t)$
Nombre d'euros allemands à $t$	$N_A - X(t)$	$X + N_A - N_B$

### 3 Modélisation

#### 3.1 La fonction qui échange les pièces

On se positionne à un instant donné. Il y a  $x$  pièces françaises en France.

**Question 3.1.** Justifier le tableau à double entrée suivant :

Pays : Allemagne France	€Français	€Allemand
€Français	$x$	$x+1$
€Allemand	$x-1$	$x$

Première ligne : France; puis l'origine de la pièce que l'on a tiré en France.

Première colonne : Allemagne; puis l'origine de la pièce tirée en Allemagne.

Il y a 4 cas possibles, 2 ne changent rien et 2 autres font évoluer  $x$  (de  $\pm 1$ ).

**Question 3.2.** Montrer que la probabilité de tirer une pièce française en France vaut  $\frac{N_A - x}{N_A}$ .

Soit  $a$  un nombre aléatoire entre 0 et 1 et  $y \in [0, 1]$  (un réel compris entre 0 et 1). On admet que  $P(a < y) = y$ .

Dans python, on dispose de la fonction `rand.rand()` qui retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

### 4 Pistes d'ouvertures

On propose des pistes de réflexions pour aller plus loin. On précise qu'une étude théorique (même dans le modèle simple à 2 pays) est assez difficile.

- Critiquer le modèle proposé. Est-il vraiment réaliste ? Quelles sont les conséquences des distances entre les pays, différences régionales, variation du flux de voyageurs (touristes), de remise en circulation de pièces, etc.
- Quid des billets et paiements par carte bleue
- (\*\*) Proposer une modélisation à plus que 2 pays.

Source : [agreg.org](http://agreg.org)