G2 – Trigonométrie

I Enroulement de la droite numérique

I.1 Cercle trigonométrique

Définition I.1 — Dans le plan muni d'un repère (O ;I ;J), le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque I Le périmètre du cercle est de 2π.

I.2 Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

Proposition I.1 —
- *Par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.*
- *Soit a un nombre réel, et M le point du cercle trigonométrique associé au réel a, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $a + k2\pi$.*

Preuve
- Faire un schéma.
- En effet, le périmètre du cercle vaut $\mathcal{P} = 2\pi$. Donc les réels a est $a + k2\pi$ arrivent au même endroit sur le cercle (mais pour $a + k2\pi$, on aura fait k tours sur le cercle en plus que pour a) □

II Cosinus et sinus d'un nombre réel

II.1 Définition

Définition II.1 — Soit M le point sur le cercle trigonométrique associé au réel a. Alors
- $\cos a$ est l'abscisse du point M.
- $\sin a$ est l'ordonnée du point M.

Proposition II.1 — *Pour tout nombre réel a, on a :*
- $-1 \leq \cos a \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin a \leq 1$
- *Pour tout entier relatif k,* $\cos(a + k2\pi) = cos(a)$ *et* $\sin(a + k2\pi) = \sin(a)$*. On dit que les fonctions* cos *est* sin *sont* 2π *périodiques.*
- $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

Preuve
- $\cos a$ et $\sin a$ sont les coordonnées d'un point sur le cercle de centre O et de rayon 1 : donc ses coordonnées sont nécessairement plus grande que -1 et plus petite que 1 (faire un dessin, le cercle est inscrit dans un carré de côté 2, qui va de -1 à 1).
- Lorsque l'on enroule la droite numérique autour du cercle, les points $M(x; y)$ et $M'(x + k\mathcal{P}; y + k\mathcal{P})$ vont être représenté par le même point sur le cercle.

— Prenons le point M sur le cercle, de coordonnées $M(\cos a ; \sin a)$. M est sur le cercle de centre O et de rayon 1, donc la distance OM vaut 1 (le rayon du cercle). Par ailleurs, la distance OM vaut $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a}$. Donc $OM^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □

II.2 Valeurs remarquables

PROPOSITION II.2 — *Courbe représentative des fonctions* cos, sin.

PROPOSITION II.3 — *On donne quelques valeurs remarquables de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Angle (degrés)	x *(radian)*	$\cos x$	$\sin x$
0	*0*	*1*	*0*
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
180	π	1	0